Chương I: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

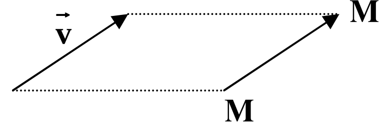
BÀI HỌC 1: PHÉP TỊNH TIẾN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (a;b)$ là phép biến hình, biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Ký hiệu: $T_{\vec{v}}(M) = M'$ hoặc $T_{\vec{v}}: M \to M'$



2. Tính chất

ĐỊNH LÝ 1

Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M′N′=MN.

ĐỊNH LÝ 2

Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

HỆ QUẢ

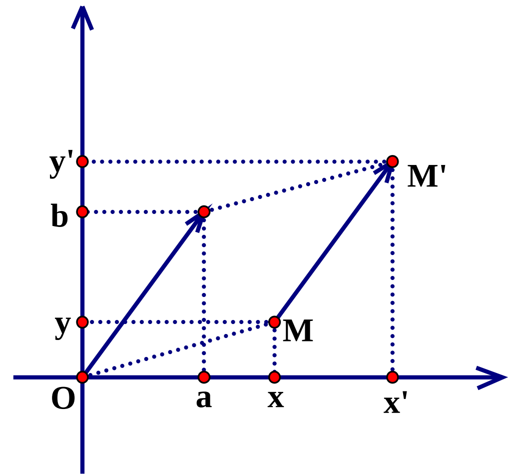
- Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Phép tịnh tiến biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng với nó.
- Phép tịnh tiến biến tam giác thành tam giác bằng nó.
- Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn bằng nó.
- Phép tịnh tiến biến góc thành góc bằng nó.

…

3. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (a;b); M(x;y); M'(x';y')$.

Khi đó phép tịnh tiến : $T_{\vec{v}}(M) = M'$ có biểu thức tọa độ là : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$



II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép tịnh tiến bằng tính toán

Bài 1: $\vec{v} = (-1;2); A(3;5); B(-1;1); d: x - 2y + 3 = 0$

1. Tìm tọa độ các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến $\vec{v}$

2. Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến $\vec{v}$

3. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v}$

Hướng dẫn:

1. $T_{\vec{v}}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + x_{\vec{v}} = 3 - 1 = 2 \\ y_{A'} = y_A + y_{\vec{v}} = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2;7)$

Tương tự có : B'(-2;3)

2. $T_{\vec{v}}(C) = A \Rightarrow \begin{cases} x_A = x_C + x_{\vec{v}} \\ y_A = y_C + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_C - 1 \\ 5 = y_C + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4;3)$

3.

Cách 1: Giả sử $M(x;y) \in d, T_{\vec{v}}(M) = M'(x';y') \in d' \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow M(x'+1; y'-2) \in d \Rightarrow x' - 2y' + 8 = 0$

Vậy : d' có phương trình: x - 2y + 8 = 0

Cách 2: $T_{\vec{v}}(d) = d' \Rightarrow d' // d \Rightarrow d' : x - 2y + c = 0$

+ Chọn M(-3;0) $\in d \Rightarrow T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = -3 - 1 = -4 \\ y_{M'} = 0 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow M'(-4;2)$

+ $M' \in d' \Rightarrow -4 - 2.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 8 \Rightarrow d' : x - 2y + 8 = 0$

Bài 2: d cắt Ox tại A(-4;0), cắt Oy tại B(0;5). Hãy viết phương trình tham số của d' là ảnh của d qua phép tinh tiến $\vec{v} = (5;1)$

Hướng dẫn:

+ Chọn $\vec{U}_d = \overrightarrow{AB} = (4;5)$

+ Vì $T_{\vec{v}}(d) = d' \Rightarrow \vec{U}_{d'} = \vec{U}_d = (4;5)$

+ Gọi $T_{\vec{v}}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + 5 = 1 \\ y_{A'} = y_A + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(1;1)$

+ Vì $A \in d \Rightarrow A' \in d' \Rightarrow d' : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \quad (t \in R)$

Bài 3:

1. Cho $(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (-2;2)$

2. Cho $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (-2;3)$

Hướng dẫn:

1.

Cách 1:

+ (C) có tâm I(2;1); bán kính R = 2

+ $T_{\vec{v}}(C) = C' \Rightarrow R_{C'} = R = 2$

+ $T_{\vec{v}}(I) = I' \Rightarrow \begin{cases} x_{I'} = x_I + (-2) = 0 \\ y_{I'} = y_I + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow I'(0;3)$

+ Vậy $(C') : (x-0)^2 + (y-3)^2 = 4$

Cách 2:

+ Gọi $T_{\vec{v}}\left(M(x;y) \in (C)\right) = M'(x';y') \in (C') \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x'+2; y'-2)$

+ $M \in (C) \Rightarrow x'^2 + (y'-3)^2 = 4 \Rightarrow (C') : x^2 + (y-3)^2 = 4$

2. Tương tự ta có $(C') : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

Bài 4: Cho $\mathbf{A(2;3);B(1;1);\vec{v}=(3;1)}$. Tìm tọa độ A', B' tương ứng là ảnh của A, B qua $\mathbf{T_{\vec{v}}}$. Tính độ dài các vectơ $\mathbf{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}$

Hướng dẫn:

+ $\mathbf{T_{\vec{v}}(A)=A'\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=x_A+3=2+3=5\\y_{A'}=y_A+1=3+1=4\end{cases}\Rightarrow A'(5;4)}$

+ Tương tự ta có: B'(4;2)

+ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5}$ (tính chất phép tịnh tiến)

Bài 5: Cho $\mathbf{\vec{U}=(1;3);\vec{V}=(2;1);M(x;y)}$

1. Tìm tọa độ của $\mathbf{M_1}$ là ảnh của M qua $\mathbf{T_{\vec{U}}}$

2. Tìm tọa độ của $\mathbf{M'}$ là ảnh của $\mathbf{M_1}$ qua $\mathbf{T_{\vec{V}}}$

3. Tính tọa độ vectơ $\mathbf{\overrightarrow{MM'}}$. So sánh $\mathbf{\overrightarrow{MM'}}$ và vectơ $\mathbf{\vec{t}=\vec{u}+\vec{v}}$

Hướng dẫn:

1. $\mathbf{\begin{cases}x_{M_1}=x_M+1=x+1\\y_{M_1}=y_M+3=y+3\end{cases}\Rightarrow M_1(x+1;y+3)}$

2. $\mathbf{\begin{cases}x_{M'}=x_{M_1}+2=x+3\\y_{M'}=y_{M_1}+1=y+4\end{cases}\Rightarrow M'(x+3;y+4)}$

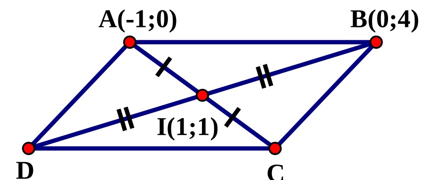
3. Có $\mathbf{\begin{cases}\overrightarrow{MM'}=(3;4)\\\vec{t}=\vec{u}+\vec{v}=(3;4)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{t}}$

Bài 6: Giải bài toán sau bằng cách sử dụng phép tịnh tiến:
"Xác định tọa độ các đỉnh C và D của hình bình hành ABCD, biết A(-1;0); B(0;4) và giao điểm các đường chéo là I(1;1)"

Hướng dẫn:

+ Ta có : $\mathbf{T_{\overrightarrow{AI}}(I)=C\Rightarrow\begin{cases}x_C=x_I+(x_I-x_A)=3\\y_C=y_I+(y_I-y_A)=2\end{cases}\Rightarrow C(3;2)}$

+ Tương tự: D(2;-2)



Bài 7: Cho $\mathbf{\vec{v}=(-2;1);d:2x-3y+3=0;d_1:2x-3y-5=0}$

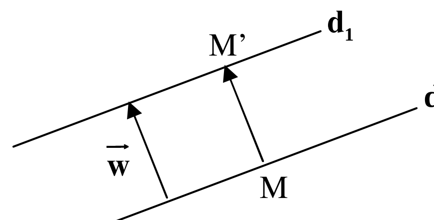
1) Viết phương trình $\mathbf{d'=T_{\vec{v}}(d)}$

2) Tìm tọa độ $\mathbf{\vec{w}}$ có phương vuông góc với d để $\mathbf{d_1=T_{\vec{w}}(d)}$

Hướng dẫn:

1) Đáp số: d': 2x - 3y + 10 = 0

2)



+ Vì $\vec{w}$ có phương vuông góc với d nên $\vec{w} = k.\vec{n}_d = (k.2; k.(-3))$

+ Chọn $M(0;1) \in d \Rightarrow T_{\vec{w}}(M) = M' \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + x_{\vec{w}} = 2k \\ y_{M'} = y_M + y_{\vec{w}} = -3k + 1 \end{cases} \Rightarrow M'(2k; -3k+1)$

+ $M' \in d_1 \Rightarrow 2.(2k) - 3.(-3k+1) - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{8}{13} \Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{16}{13}; -\frac{24}{13}\right)$

Bài 8: Cho (d): 3x - y - 9 = 0. Tìm phép tịnh tiến theo phương song song với trục Ox biến d thành d' đi qua gốc tọa độ. Hãy viết phương trình d'.

Hướng dẫn:

+ Giả sử $T_{\vec{v}}(d) = d' \Rightarrow d' // d \Rightarrow d': 3x - y + c = 0$

+ Vì d' đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow 3.0 - 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow d': 3x - y = 0$

+ Do $\vec{v}$ có phương song song với Ox $\Rightarrow \vec{v} = (a; 0)$

+ Chọn M(3;0) $\in d \Rightarrow T_{\vec{v}}(M) = M' \in d' \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + x_{\vec{v}} = 3 + a \\ y_{M'} = y_M + y_{\vec{v}} = 0 + 0 \end{cases} \Rightarrow M'(3+a; 0)$

+ $M' \in d' \Rightarrow 3.(3+a) - 0 = 0 \Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow \vec{v} = (-3; 0)$

Vậy phép tịnh tiến cần tìm là $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (-3; 0)$

Bài 9: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = ax^2$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (m; n)$ và (P') là ảnh của (P) qua phép tinh tiến đó. Hãy viết phương trình của (P')

Hướng dẫn

+ Gọi $M(x; y) \in (P), M'(x'; y') = T_{\vec{u}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - m \\ y = y' - n \end{cases} \Rightarrow M(x' - m; y' - n)$

+ Mà $M \in (P) \Rightarrow y' - n = a(x' - m)^2 \Rightarrow y' = ax'^2 - 2amx' + am^2 + n$

+ Mặt khác ta có $M'(x'; y') \in (P') \Rightarrow (P'): y = ax^2 - 2amx + am^2 + n$

Bài 10: Cho đường thẳng $\Delta: 6x + 2y - 1 = 0$. Tìm vec tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ để $\Delta = T_{\vec{u}}(\Delta)$

Hướng dẫn

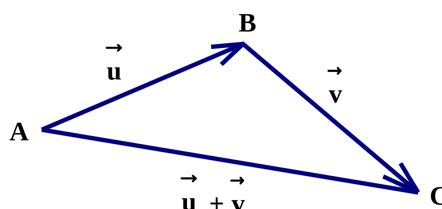
+ Ta có VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{U_\Delta} = (2; -6) = 2(1; -3)$

+ Do $\Delta = T_{\vec{u}}(\Delta) \Rightarrow \vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{U_\Delta} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (1; -3)$

Bài 11: Cho $A(-5; 2), C(-1; 0)$. Biết $B = T_{\vec{u}}(A), C = T_{\vec{v}}(B)$. Tìm mối quan hệ giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ để có thể thực hiện phép tịnh tiến biến đổi A thành C

Hướng dẫn

+ Ta có $T_{\vec{u}}(A) = B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}, T_{\vec{v}}(B) = C \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{v} \Rightarrow T_{\vec{u}+\vec{v}}(A) = C \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = (4; -2)$



Bài 12: Cho 3 điểm $K(1;2), M(3;-1), N(2;-3)$ và 2 vec tơ $\vec{u}=(2;3), \vec{v}=(-1;2)$. Tìm ảnh của K, M, N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ rồi $T_{\vec{v}}$.

Hướng dẫn

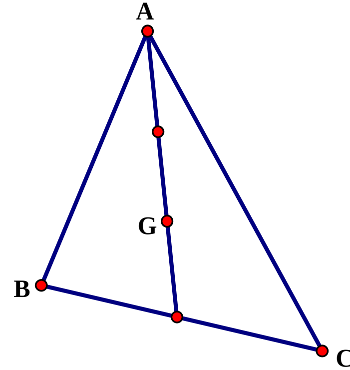
+ Theo cách làm Bài 11, ta có: $K'=T_{\vec{u}+\vec{v}}(K) \Rightarrow K'(2;7)$. Tương tự: $M'(4;4), N'(3;2)$

Bài 13: Cho $\Delta ABC, A(3;0), B(-2;4), C(-4;5)$. G là trọng tâm ΔABC và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến A thành G. Tìm $G'=T_{\vec{u}}(G)$

Hướng dẫn

+ Ta tính được :

$G(-1;3) \Rightarrow T_{\overrightarrow{AG}=(-4;3)}(A)=G \Rightarrow T_{\overrightarrow{AG}=(-4;3)}(G)=G' \Rightarrow G'(-5;6)$



Bài 14: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)=4, (C'):x^2+y^2-10x+4y+25=0$. Có hay không phép tịnh tiến vec tơ $\vec{u}$ biến (C) thành (C').

Hướng dẫn

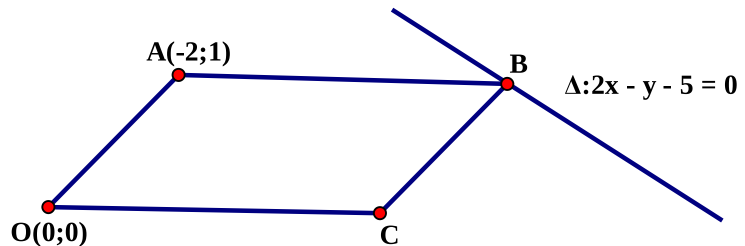
+ Ta thấy (C) có tâm I(1;-3) bán kính R = 2, (C') có tâm I'(5;-2) bán kính R' = R = 2 nên ta có phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{II'}=(4;1)$ biến (C) thành (C').

Bài 15: Cho hình bình hành OABC với $A(-2;1), B\in \Delta: 2x-y-5=0$. Tìm quỹ tích đỉnh C (biết O là gốc tọa độ)

Hướng dẫn

+ Do OABC là hình bình hành nên $T_{\overrightarrow{AO}=(2;-1)}(B)=C$, mà quỹ tích B là đường thẳng Δ bên quỹ tích C là đường thẳng $\Delta'=T_{\overrightarrow{AO}=(2;-1)}(\Delta)$

+ Ta tìm được $\Delta': 2x-y-10=0$, vậy quỹ tích C là đường thẳng có phương trình $2x-y-10=0$



DẠNG 2: Một số bài toán suy luận và quỹ tích

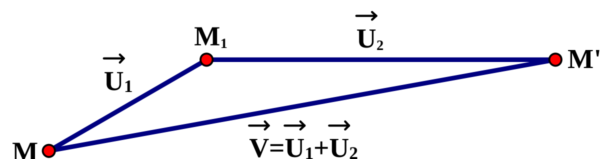
Bài 1: Cho $\vec{U_1};\vec{U_2};T_{\vec{U_1}}(M)=M_1;T_{\vec{U_2}}(M_1)=M'$. Tìm $\vec{v}$ để $T_{\vec{v}}(M)=M'$

Hướng dẫn:

Theo đề bài, ta có:

+ $T_{\vec{U_1}}(M)=M_1 \Rightarrow \vec{U}=\overrightarrow{MM_1}$

+ $T_{\vec{U_2}}(M_1)=M' \Rightarrow \vec{U_2}=\overrightarrow{M_1M'}$



+ $T_{\vec{V}}(M) = M' \Rightarrow \vec{V} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

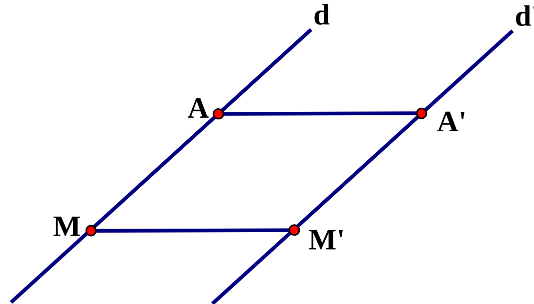
Vậy $\vec{V} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

Bài 2: Cho $d // d'$. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến d thành d'. Hỏi có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế ?

Hướng dẫn:

+ Chọn 2 điểm cố định $A \in d; A' \in d'$.

+ Xét điểm M tùy ý trên d. Giả sử :



$T_{\overrightarrow{AA'}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M'A'} \Rightarrow MA // M'A' \Rightarrow M' \in d'$

+ Do đó: $T_{\overrightarrow{AA'}}(d) = d'$. Có vô số phép tịnh tiến biến d thành d'.

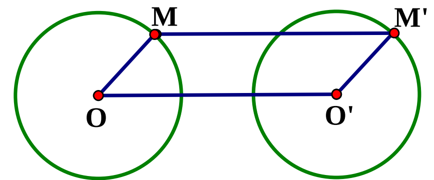
Bài 3: Cho 2 đường tròn (O;R) và (O';R). Hãy chỉ ra phép tịnh tiến biến (O;R) thành (O';R)

Hướng dẫn:

+ Đó chính là phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{OO'}}$

Chứng minh: Lấy $M \in (O;R)$. Giả sử

$T_{\overrightarrow{OO'}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$ (quy tắc hình bình hành) $\Rightarrow O'M' = OM = R \Rightarrow M' \in (O';R)$



Bài 4: ΔABC, G là trọng tâm. Xác định ảnh của ΔABC qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AG}$. Xác định điểm D sao cho $T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A$

Hướng dẫn:

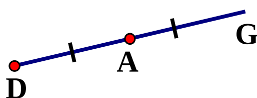
+ Ta có: $T_{\overrightarrow{AG}}(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow A' \equiv G$

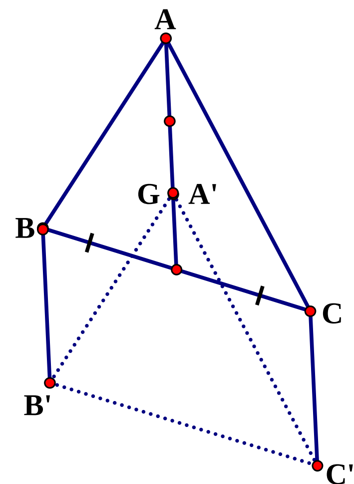
+ $T_{\overrightarrow{AG}}(B) = B' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow AA'B'B$ là hình bình hành.

+ $T_{\overrightarrow{AG}}(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow ACC'G$ là hình bình hành.

Vậy $T_{\overrightarrow{AG}}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$

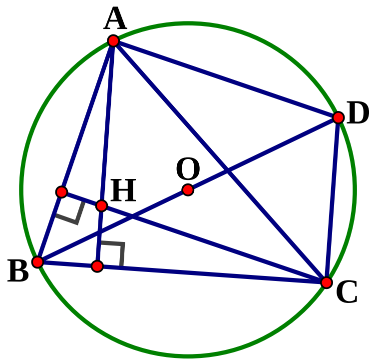
+ Xác định D: $T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow$ A là trung điểm của DG.





Bài 5: Cho 2 điểm B, C cố định trên (O;R) và A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC nằm trên đường tròn cố định.

Hướng dẫn:

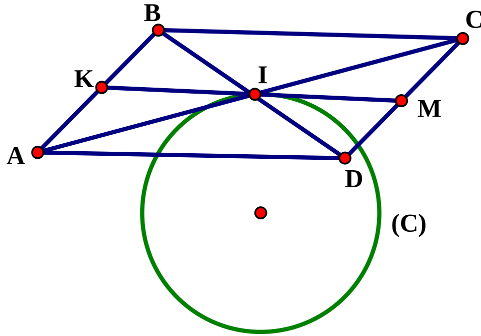


+ Kẻ đường kính BD $\Rightarrow$ **ADCH** là hình bình hành (Vì AD // CD do cùng vuông góc AB; AH // DC do cùng vuông góc BC)$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{AH}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{T}_{\overrightarrow{\mathbf{DC}}}(\mathbf{A})$.

Mà A thay đổi trên đường tròn (O;R) $\Rightarrow$ H thay đổi nằm trên đường tròn (O';R) là ảnh của đường tròn (O;R) qua $\mathbf{T}_{\overrightarrow{\mathbf{DC}}}$

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD, 2 điểm A, B cố định, tâm I di động trên đường tròn (C). Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh DC.

Hướng dẫn



+ Gọi K là trung điểm của cạnh AB $\Rightarrow$ K cố định.

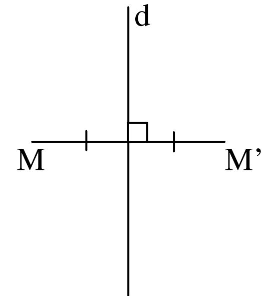
+ Ta có $T_{\overrightarrow{KI}}(I) = M$, mà quỹ tích I là đường tròn (C), vậy quỹ tích $M \in (C') = T_{\overrightarrow{KI}}(C)$

BÀI HỌC 2: PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Phép đối xứng trục d là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M’ sao cho d là đường trung trực của MM’.



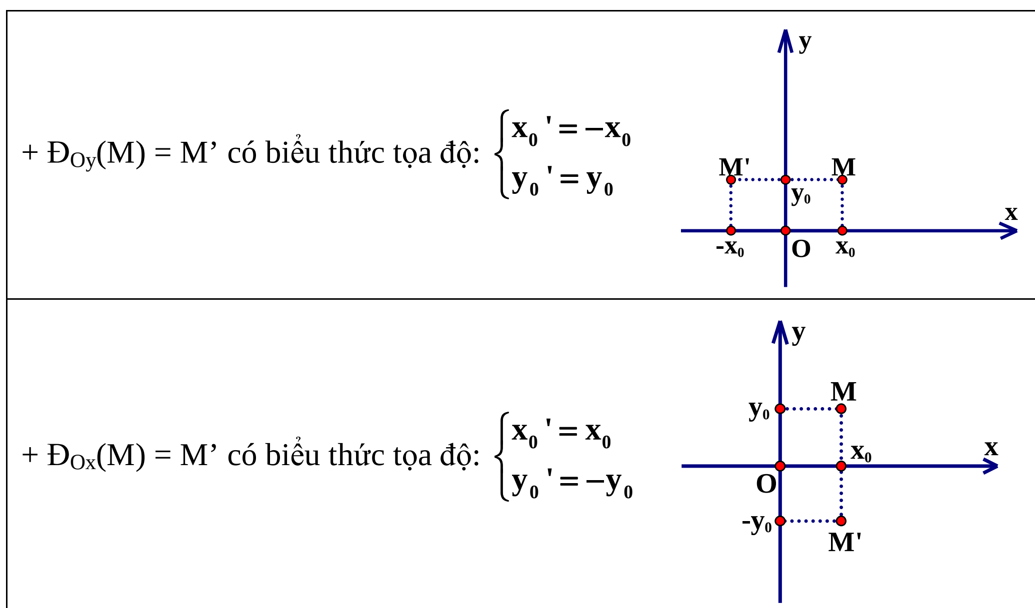
Ký hiệu: $Đ_d(M) = M'$

* Nhận xét:

+ $Đ_d(M) = M' \Rightarrow Đ_d(M') = M$

+ **$M \in d$** $\Rightarrow Đ_d(M) = M$

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục qua Ox, Oy



+ $Đ_{Oy}(M) = M'$ có biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x_0' = -x_0 \\ y_0' = y_0 \end{cases}$

+ $Đ_{Ox}(M) = M'$ có biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x_0' = x_0 \\ y_0' = -y_0 \end{cases}$

3. Tính chất của phép đối xứng trục

Tính chất 1.

Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì

Tính chất 2.

Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

4. Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng qua d biến H thành chính nó.

Khi đó, ta nói H là hình có trục đối xứng.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép đối xứng trục bằng tính toán

Bài 1: Cho điểm M(1;3). Tìm tọa độ M’ là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy, rồi tìm tọa độ của điểm M’’ là ảnh của M’ qua phép đối xứng trục Ox.

Hướng dẫn:

+ $Đ_{Oy}$(M) = M’ $\Rightarrow \begin{cases} x' = -x = -1 \\ y' = y = 3 \end{cases} \Rightarrow M'(-1;3)$

+ $Đ_{Ox}$(M’) = M’’ $\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' = -1 \\ y'' = -y' = -3 \end{cases} \Rightarrow M''(-1;-3)$

Bài 2: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Ox

Hướng dẫn:

+ Goi I; R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C); gọi I’;R’ lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C’). Khi đó ta có R’ = R = 2 và I’ = $Đ_{Ox}$(I)

+ Dễ dàng tìm được I’(1;-2) từ đó có phương trình đường tròn (C’) là:

$(C'):(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Bài 3:

1. Cho $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy

2. Cho M(-3;2); $\Delta: x+3y-8=0;(C):(x+3)^2+(y+2)^2=4$. Tìm ảnh của M; Δ; (C) qua $Đ_a$, trong đó a: x - 2y + 2 = 0

3. Cho d: x - 5y + 7 = 0; d’: 5x - y - 13 = 0. Tìm phép đối xứng trục biến d thành d’

4. Cho d: x - 2y + 5 = 0; d’: x - 2y + 3 = 0. Tìm phép đối xứng trục biến d thành d’

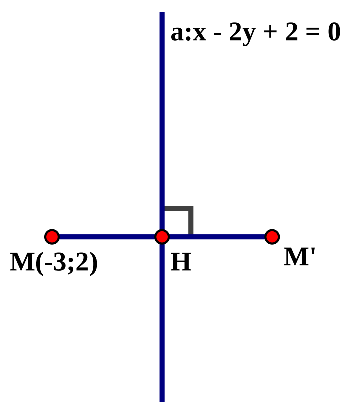
Hướng dẫn:

1.

+ Gọi $M(x;y)\in d$, khi đó $Đ_{Oy}$(M) = M’ $\Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow M(-x';y')$

+ $M\in d \Rightarrow \frac{-x'-1}{2}=\frac{y'+2}{3} \Leftrightarrow 3x'+2y'+7=0$

+ Vậy d’: 3x + 2y + 7 = 0



2.

Ý 1:

+ Gọi M’ = $Đ_a$(M) $\Rightarrow$ a là đường trung trực của MM’.

+ Đường thẳng MM’ qua M và vuông góc với a

$\Rightarrow MM': 2x+y+4=0$

+ Gọi $H = MM'\cap a \Rightarrow H(-2;0)$

+ H là trung điểm của MM’ $\Rightarrow M'(-1;-2)$

Ý 2:

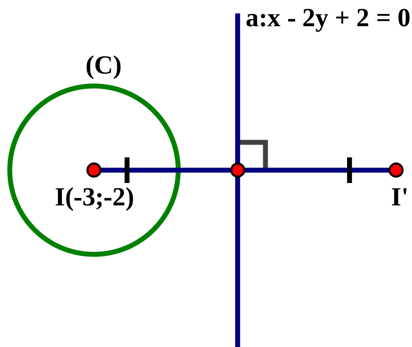
+ Lấy $\mathbf{A(8;0);B\left(0;\frac{8}{3}\right)} \in \Delta$.

+ Gọi A’ = Đ$_a$(A); B’ = Đ$_a$(B) $\Rightarrow \mathbf{A',B'}$

+ Gọi Δ' = Đ$_a$(Δ) $\Rightarrow \Delta'$ là đường thẳng đi qua A’; B’

$\Rightarrow \mathbf{\Delta': 3x - y - 4 = 0}$

Ý 3:



+ Giả sử (C’) = Đ$_a$(C), khi đó đường tròn (C) và (C’) cùng bán kính, tâm I’ của đường tròn (C’) tương ứng là ảnh của tâm I đường tròn (C) qua phép đối xứng trục a.

+ Từ đó ta tìm được

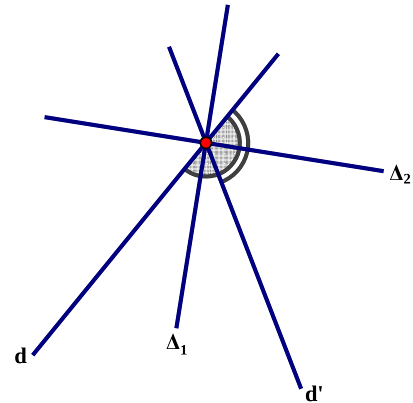
$$\mathbf{I'\left(-\frac{21}{5};\frac{2}{5}\right) \Rightarrow (C'): \left(x+\frac{21}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{2}{5}\right)^2 = 4}$$

3.

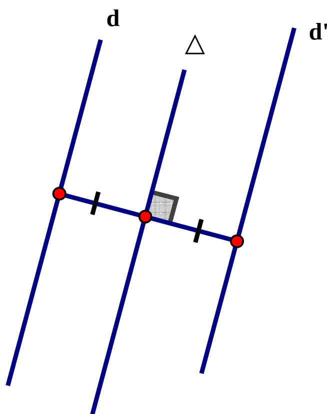
+ Ta thấy d; d’ không song song, vậy trục đối xứng Δ của phép đối xứng trục biến d thành d’ chính là phân giác của d và d’ và có phương trình:

$$\frac{|x-5y+7|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}} = \frac{|5x-y-13|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_1: x+y-5=0\\ \Delta_2: x-y-1=0\end{array}\right.$$. Vậy

Đ$_{\Delta_1}$(d) = d’; Đ$_{\Delta_2}$(d) = d’



4.



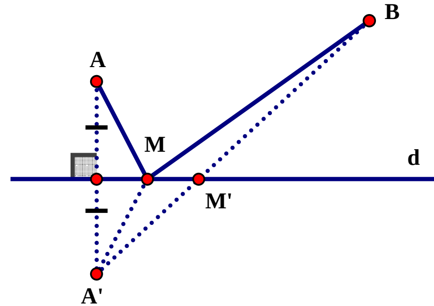
+ Ta thấy d // d’ , vậy trục đối xứng Δ của phép đối xứng trục biến d thành d’ chính là đường thẳng song song và cách đều d; d’ có phương trình:

$\mathbf{\Delta: x - 2y + \frac{5+3}{2} = 0}$. Vậy Đ$_\Delta$(d) = d’

DẠNG 2: Một số bài toán suy luận và quỹ tích

Bài 1: Cho A, B cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm M sao cho tổng $\mathbf{(MA+MB)_{min}}$

Hướng dẫn:



+ Gọi Đ$_d$(A) = A' $\Rightarrow \mathbf{MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B}$
+ $\mathbf{(MA + MB)_{min} = A'B}$ **khi M ≡ M' (M'=A'B ∩ d)**

Bài 2: Qua phép đối xứng trục d:
+ Những điểm nào biến thành chính nó?
+ Những đường thẳng nào biến thành chính nó?
+ Những đường tròn nào biến thành chính nó?

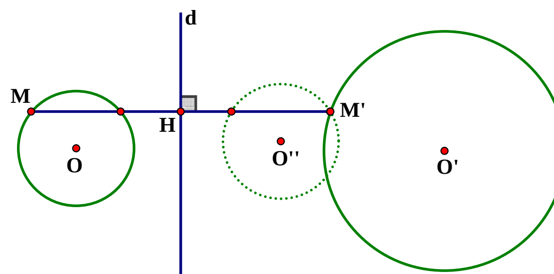
Hướng dẫn:
+ Những điểm nằm trên trục đối xứng d biến thành chính nó
+ Những đường thẳng vuông góc với trục đối xứng d hoặc trùng với d thì biến thành chính nó.
+ Những đường tròn có tâm nằm trên trục đối xứng d thì biến thành chính nó.

Bài 3: Tìm trục đối xứng của các hình sau:
1. Hình gồm 2 đường tròn không đồng tâm nhưng có bán kính bằng nhau.
2. Hình gồm 2 đường tròn không đồng tâm có bán kính khác nhau.
3. Đoạn thẳng AB.
4. Đường thẳng d.

Hướng dẫn:
1. Có 2 trục đối xứng:
+ Đường nối tâm.
+ Đường trung trực của đoạn thẳng nối tâm.
2. Có 1 trục đối xứng: Là đường nối tâm.
3. Có 2 trục đối xứng:
+ Đường trung trực của đoạn AB
+ Đường thẳng chứa đoạnAB
4. Có vô số trục đối xứng:
+ Những đường thẳng vuông góc với d
+ Chính đường thẳng d

Bài 4: Cho 2 đường tròn (O;R) ; (O';R') và đường thẳng d. Hãy xác định 2 điểm M và M' lần lượt nằm trên 2 đường tròn đó sao cho d là trung trực của MM'

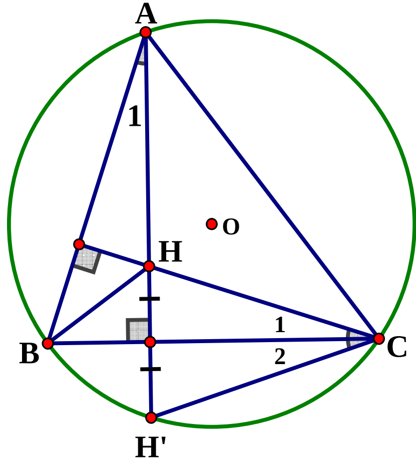
Hướng dẫn:



+ Gọi (O'') là ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_d$
+ Lấy M bất kỳ trên (O), goi M' = $Đ_d$(M) $\Rightarrow \mathbf{M' \in (O'');} \Rightarrow \mathbf{M'=(O'') \cap (O')}$
Số nghiệm hình là số giao điểm của (O') và (O'')

Bài 5: Cho 2 điểm B; C phân biệt cố định trên đường tròn (O); A là điểm di động trên (O). Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABC

Hướng dẫn:



+ Gọi $\mathbf{H' = AH \cap (O)} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$);

$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{sd\widehat{BH'}}{2} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

$\Rightarrow \Delta HCH'$ cân tại C $\Rightarrow$ BC là trung trực của HH' $\Rightarrow$ H' = $Đ_{BC}$(H)

+ **Do** $\mathbf{H' \in (O) \Rightarrow H \in (O')}$ là ảnh của (O) qua $Đ_{BC}$.

KIẾN THỨC MỞ RỘNG : Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục

1. Nếu $\Delta: Ax + By + C = 0; M(x_0; y_0); M'(x_0'; y_0') = Đ_\Delta(M)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_0' = x_0 - 2.\dfrac{f(x_0;y_0)}{\left(\vec{n}_\Delta\right)^2}.A \\ y_0' = y_0 - 2.\dfrac{f(x_0;y_0)}{\left(\vec{n}_\Delta\right)^2}.B \end{cases}$$ **Trong đó f(x;y)=Ax+By+C**

Ví dụ minh họa: Cho điểm M(1;2) và $\Delta: 3x + 4y - 1 = 0$. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua Δ

+ Ta có điểm M' có tọa độ là : $\begin{cases} x' = 1 - 2.\dfrac{3.1 + 4.2 - 1}{3^2 + 4^2}.3 = -\dfrac{7}{5} \\ y' = 2 - 2.\dfrac{3.1 + 4.2 - 1}{3^2 + 4^2}.4 = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow M'\left(-\dfrac{7}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$

2. Nếu $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0; \Delta: Ax + By + C = 0$. Khi đó d_2 là đường thẳng đối xứng với d_1 qua Δ có phương trình:

$$d_2: 2.\frac{\vec{n}_{d_1}.\vec{n}_\Delta}{\left(\vec{n}_\Delta\right)^2}.f(x;y) - f_1(x;y) = 0 \text{ (trong đó: } f_1(x;y) = A_1x + B_1y + C_1; f(x;y) = Ax + By + C)$$

Ví dụ 1: Hãy tìm các đường thẳng d_1' đối xứng với $d_1: 5x + y - 14 = 0$ và d_2' đối xứng với $d_2: 5x + 3y + 10 = 0$ qua đường thẳng $\Delta: 5x + 3y - 4 = 0$

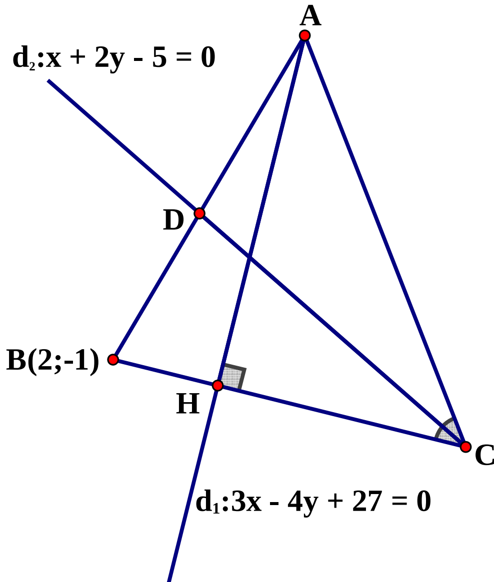
+ Đường thẳng d_1' có phương trình là: $2.\dfrac{(5;1).(5;3)}{(5;3)^2}.(5x + 3y - 4) - (5x + y - 14) = 0$

$\mathbf{d_1': 55x + 67y + 126 = 0}$

+ Đường thẳng $\mathbf{d_2}$' có phương trình là: $\mathbf{2.\frac{(5;3).(5;3)}{(5;3)^2}.(5x+3y-4)-(5x+3y+10)=0}$

$\mathbf{d_2': 5x + 3y - 18 = 0}$

Ví dụ 2: Lập phương trình các cạnh của ΔABC, biết B(2;-1), đường cao và đường phân giác trong đi qua 2 đỉnh A và C lần lượt có phương trình: $\mathbf{d_1: 3x - 4y + 27 = 0; d_2: x + 2y - 5 = 0}$



+ Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc $\mathbf{d_1 \Rightarrow BC: 4x + 3y - 5 = 0}$

+ CA đối xứng với BC qua

$\mathbf{d_2 \Rightarrow CA: 2.\frac{(4;3).(1;2)}{(1;2)^2}(x+2y-5)-(4x+3y-5)=0}$

$\mathbf{\Rightarrow CA: y - 3 = 0}$

+ $\mathbf{A = CA \cap d_1 \Rightarrow A(-5;3) \Rightarrow AB: 4x + 7y - 1 = 0}$

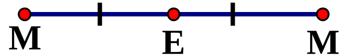
BÀI HỌC 3: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm E. Phép biến hình biến điểm M của mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\mathbf{\overrightarrow{EM'} = -\overrightarrow{EM}}$ được gọi là phép đối xứng tâm E.

Ký hiệu: Đ$_E$(M) = M'

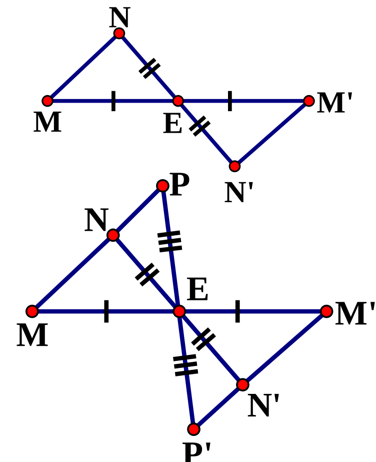


2. Tính chất cơ bản

Định lý 1:

Nếu Đ$_E$(M) = M'; Đ$_E$(N) = N' thì $\begin{cases} \mathbf{M'N' = MN} \\ \mathbf{\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}} \end{cases}$

Định lý 2: Nếu 3 điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự thì qua phép đối tâm biến thành 3 điểm M', N', P' tương ứng cũng thẳng hàng theo thứ tự đó.



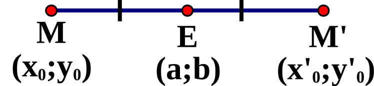
*** Nhận xét:**

Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

3. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy, cho E(a;b), $\mathbf{M(x_0;y_0)}$. $Đ_E$(M) = M'(x'_0;y'_0) có biểu thức tọa độ là:

$$\begin{cases} x'_0 = 2a - x_0 \\ y'_0 = 2a - y_0 \end{cases}$$



II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép đối xứng tâm bằng tính toán.

Bài 1: Cho A(-1;3); d: x - 2y + 3 = 0. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O

Hướng dẫn:

Ý 1: A' = $Đ_O$(A) $\Rightarrow \mathbf{A'(1;-3)}$

Ý 2: Lấy $\mathbf{M(x;y) \in d} \Rightarrow Đ_O$(M) = M' có tọa độ : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(-x';-y')}$

+ $\mathbf{M \in d \Rightarrow (-x') - 2.(-y') + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0}$

+ Vậy d': x - 2y - 3 = 0

Bài 2:

1. Cho đường tròn $\mathbf{(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1}$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm O(0;0).

2. Cho I(2;-3); d: 3x + 2y - 1 = 0. Viết phương trình d' = $Đ_I$(d).

3. Cho I(1;2); d: 3x - y + 9 = 0; $\mathbf{(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0}$. Viết phương trình ảnh của d và (C) qua $Đ_I$

Hướng dẫn:

1. $Đ_O\left(\mathbf{M(x;y) \in (C)}\right) = \mathbf{M'(x';y') \in (C')} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(-x';-y')}$

+ $\mathbf{M \in (C) \Rightarrow (-x'+2)^2 + (-y'-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x'-2)^2 + (y'+1)^2 = 1}$

+ Vậy đường tròn $\mathbf{(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1}$

2. Tương tự có $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -6 - y' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(4 - x'; -6 - y')}$

+ $\mathbf{M \in d \Rightarrow ...3x' + 2y' + 1 = 0 \Rightarrow d': 3x + 2y + 1 = 0}$

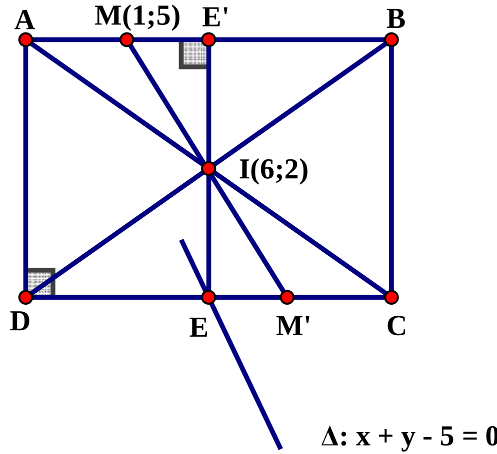
3. Tương tự có $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M(2 - x'; 4 - y')}$

+ $\mathbf{M \in d \Rightarrow ...3x' - y' - 11 = 0 \Rightarrow d': 3x - y - 11 = 0}$

+ $\mathbf{M \in (C) \Rightarrow ...x'^2 + y'^2 - 6x' - 2y' + 30 = 0 \Rightarrow (C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 30 = 0}$

Bài 3: (ĐHKA-2009): Trong hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(6;2); M(1;5) nằm trên đường thẳng AB. Trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn:



+ Gọi $Đ_I(M)$ = M’ $\Rightarrow M'(11;-1)\in CD$

+ $E\in\Delta\Rightarrow E(x;5-x)$

+ $IE\perp CD\Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EM'}=0$ (hoặc $IM'^2=IE^2+EM^2$) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6\Rightarrow E(6;-1)\\ x=7\Rightarrow E(7;-2)\end{array}\right.$

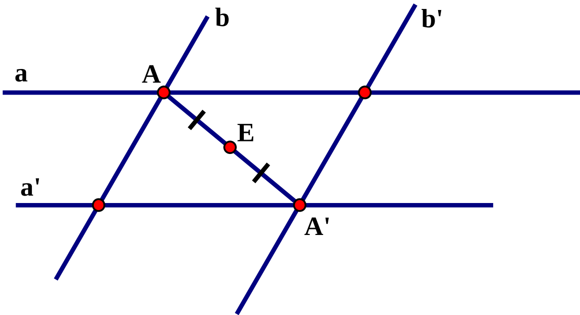
+ Gọi $Đ_I(E)$ = E’(6;5) với E(6;-1); $Đ_I(E)$ = E’(5;6) với E(7;-2)

+ Đường thẳng AB cần tìm đi qua M và E’

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB: y-5=0\\ AB: x-4y+19=0\end{array}\right.$

Bài 4: Cho đường thẳng a: 2x + 3y + 1 = 0; b: 2x - 3y - 1 = 0; a’: 2x + 3y - 5 = 0; b’: 2x - 3y + 7 = 0. Tìm phép đối xứng tâm $Đ_E$ thỏa mãn : $a\to a'; b\to b'$

Hướng dẫn:



+ Gọi

$A=a\cap b\Rightarrow A\left(0;-\frac{1}{2}\right); A'=a'\cap b'\Rightarrow A'\left(-\frac{1}{2};2\right)$

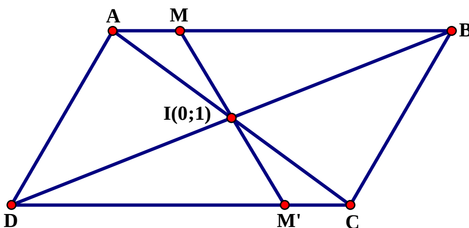
+ $Đ_E$ thỏa mãn : $a\to a'; b\to b'$

$\Leftrightarrow A\to A'\Leftrightarrow$ E là trung điểm AA’ $\Leftrightarrow E\left(-\frac{1}{4};\frac{5}{6}\right)$

(Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng thì biến giao điểm thành giao điểm)

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD tâm I(0;1); đường thẳng AB: x + y + 2 = 0. Viết phương trình đường thẳng CD.

Hướng dẫn:



+ Ta thấy $M(x;y)\in AB$, M’(x’;y’) = $Đ_I(M)$ $\Rightarrow M'\in CD$

+ Ta có: $\begin{cases} x'=-x\\ y'=2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-x'\\ y=2-y'\end{cases}\Rightarrow M(-x';2-y')$

+ $M\in AB\Rightarrow -x'+(2-y')+2=0\Leftrightarrow x'+y'-4=0\Rightarrow CD: x+y-4=0$

Bài 6: Cho đồ thị hàm số $\mathbf{y=\frac{1}{x}}$ (C). Chứng minh rằng (C) có tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

Hướng dẫn:

+ Lấy $\mathbf{M(x;y)\in(C)}$, gọi $\mathbf{M'(x';y')}$ = $Đ_O$(M) từ đó lập được phương trình (C') = $Đ_O$(C) có phương trình là : $\mathbf{y=\frac{1}{x}}$

+ Như vậy qua phép đối xứng tâm O, (C) biến thành chính nó nên O là tâm đối xứng của (C)

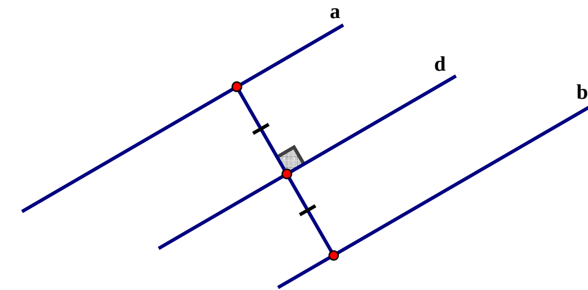
Bài 7: Chứng minh rằng gốc tọa độ O là tâm đối xứng của (E) và (H) lần lượt có phương trình. $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

Hướng dẫn:

+ Lấy $\mathbf{M(x;y)\in(E);(H)}$, viết phương trình (E'), (H') lần lượt là hình đối xứng của (E) và (H) qua O.

+ Nhận thấy $\mathbf{(E)\equiv(E');(H)\equiv(H')}$. (đpcm)

Bài 8: Cho đường thẳng $\mathbf{a:3x-4y-5=0;b:3x-4y-1=0}$. Tìm tập hợp các tâm đối xứng I của $Đ_I$(a) = b.



Hướng dẫn:

+ Vì a // b ; $Đ_I$(a) = b. $\Rightarrow$ I cách đều a và b.

+ Gọi I(x;y)

$$\Rightarrow \mathbf{d(I;a)=d(I;b)\Leftrightarrow\frac{|3x-4y-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3x-4y-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}}$$

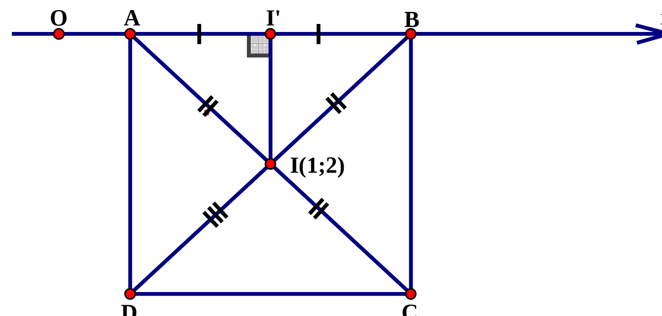
$$\Leftrightarrow \mathbf{3x-4y-3=0}$$

+ Vậy tập hợp I là đường thẳng d: 3x - 4y - 3 = 0

$$\left(\mathbf{-3=\frac{(-5)+(-1)}{2}}\right)$$

Bài 9: Hình vuông ABCD có tâm I(1;2). A, B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ 4 đỉnh A, B, C, D

Hướng dẫn:



+ Gọi I' là hình chiếu của I lên Ox $\Rightarrow \mathbf{I'(1;0)}$

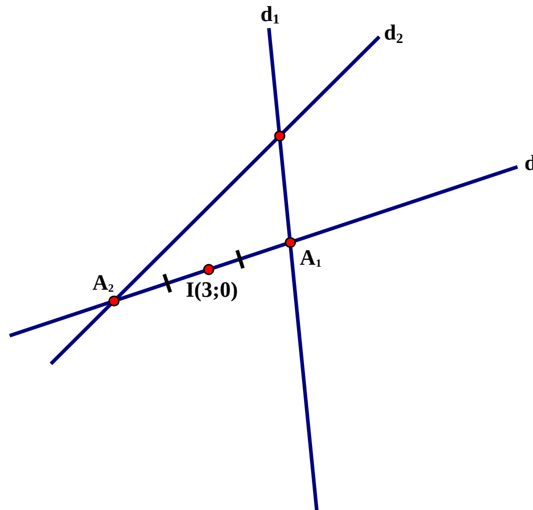
+ Vì $\mathbf{A,B\in Ox\Rightarrow A(a;0);B(b;0)}$

+ Giải hệ: $\begin{cases} x_{I'} = \frac{a+b}{2} = 1 \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \end{cases}$ tìm được a, b. Từ đó suy ra tọa độ A, B

+ Sử dụng công thức C và D đối xứng A và B qua I sẽ có tọa độ C, D.

Bài 10: Cho I(3;0); $d_1 : 2x - y - 2 = 0; d_2 : x + y + 3 = 0$. Viết phương trình d qua I, cắt $d_1; d_2$ tại $A_1; A_2$ nhận I làm trung điểm.

Hướng dẫn:



+ $A_1 \in d_1 \Rightarrow A_1(a; 2a-2)$

+ I là trung điểm $A_1A_2 \Rightarrow A_2(6-a; 2-2a)$

+ $A_2 \in d_2 \Rightarrow a? \Rightarrow A_1$

+ Đường thẳng d cần tìm qua I và A_1

Bài 11: Cho $(P): y = x^2$. Phép đối xứng tâm I(1;2) biến (P) thành (P') có phương trình là ?

Hướng dẫn:

+ Gọi $M(x;y) \in (P)$. M' = Đ$_I$(M) $\Rightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases} \Rightarrow M(2-x'; 4-y')$

+ $M \in (P) \Rightarrow y' = -x'^2 + 4x' \Rightarrow (P'): y = -x^2 + 4x$

DẠNG 2: Một số bài toán suy luận quỹ tích

Bài 1: Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng ?

Hướng dẫn:

+ Tam giác đều không có tâm đối xứng.

+ Hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm 2 đường chéo.

+ Ngũ giác đều không có tâm đối xứng.

+ Lục giác đều có tâm đối xứng là tâm của nó.

Bài 2: Qua phép đối xứng tâm O:

+ Những điểm nào biến thành chính nó?

+ Những đường thẳng nào biến thành chính nó?

+ Những đường tròn nào biến thành chính nó?

Hướng dẫn:

Qua phép đối xứng tâm O:

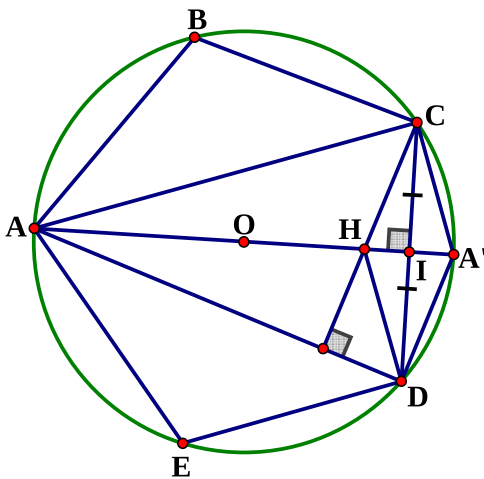
+ Tâm O biến thành chính nó.
+ Những đường thẳng đi qua tâm O biến thành chính nó.
+ Những đường tròn tâm O biến thành chính nó.

Bài 3: Hãy chỉ ra tâm đối xứng của các hình sau đây:
+ Đường thẳng d
+ Hình tạo bởi hai đường thẳng song song d và d’

Hướng dẫn:
+ Mỗi điểm O nằm trên d là tâm đối xứng của d
+ Mỗi điểm O nằm trên đường thẳng a song song và cách đều hai đường thẳng đã cho là một tâm đối xứng của hình tạo bởi 2 đường thẳng song song đó.

Bài 4: Cho ngũ giác đều ABCDE nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh ghi theo chiều thuận). Gọi $\mathbf{A'} =$ Đ$_O$(A); I = $\mathbf{CD} \cap \mathbf{AA'}$. H là trực tâm $\mathbf{\Delta ACD}$. Tìm ảnh của A’ qua Đ$_I$?

Hướng dẫn:

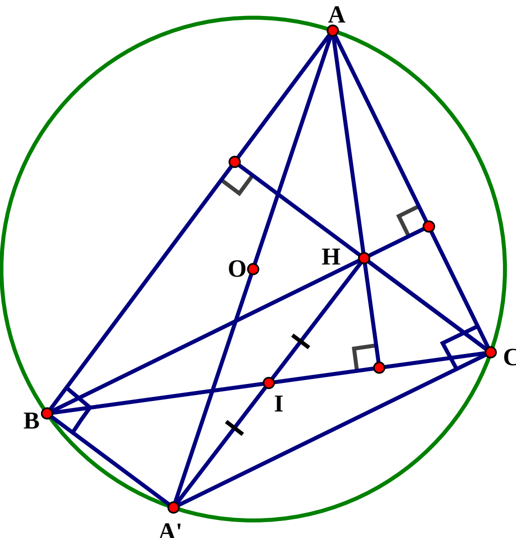


+ $\mathbf{\Delta ACD}$ cân tại A $\Rightarrow \mathbf{AA'}$ là trung trực của CD.
+ Vì A’ = Đ$_O$(A) $\Rightarrow \mathbf{A' \in (O)}$
+ Chứng minh được DHCA’ là hình bình hành, gọi $\mathbf{I = DC \cap HA'} \Rightarrow$ I là trung điểm HA’
Vậy H = Đ$_I$(A’)

Bài 5: $\mathbf{\Delta ABC}$ nội tiếp đường tròn (O;R) cố định. A di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trực tâm H và trọng tâm G của $\mathbf{\Delta ABC}$.

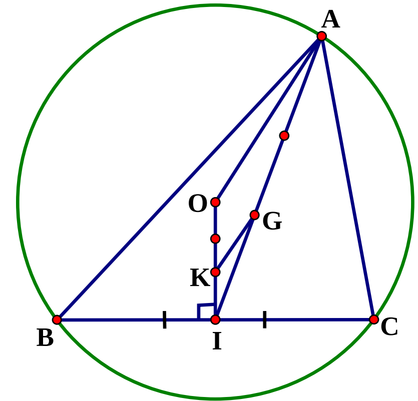
Hướng dẫn:

Ý 1:



Gọi A’ = Đ$_O$(A) $\Rightarrow \mathbf{A' \in (O;R) \Rightarrow BHCA'}$ là hình bình hành (Do $\begin{cases} \mathbf{BH // A'C\ (... \perp AC)} \\ \mathbf{CH // A'B\ (... \perp AB)} \end{cases}$)
+ Gọi I là giao điểm 2 đường chéo hình bình hành BHCA’ $\Rightarrow$ A’ = Đ$_I$(H)
+ Vậy khi A di chuyển trên đường tròn (O;R) thì A’ cũng di chuyển trên (O;R), mà H là ảnh của A’ qua phép đối xứng tâm I $\Rightarrow$ sẽ di chuyển trên đường tròn (O’;R), trong đó O’ = Đ$_I$(O)

Ý 2:



+ Gọi I là trung điểm BC và K là điểm trên OI sao cho $\frac{IK}{IO} = \frac{1}{3}$

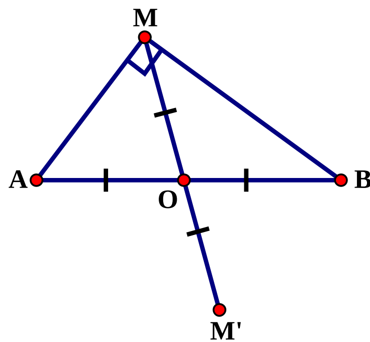
+ G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow KG//OA \Rightarrow \frac{KG}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{1}{3}OA = \frac{R}{3}$

+ Do O; BC cố định nên K cố định. Vậy G nằm trên đường tròn $\left(K;\frac{R}{3}\right)$

Bài 6: Cho 2 điểm A, B cố định AB = 2. Tìm tập hợp những điểm M' sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$, biết $MA^2 + MB^2 = 4$

Hướng dẫn:



+ Gọi O là trung điểm AB $\Rightarrow$ O cố định (Do AB cố định)

$\Rightarrow MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2.MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow MO = 1$

Vậy quỹ tích M là đường tròn (C) có tâm O, bán kính bằng 1. (1)

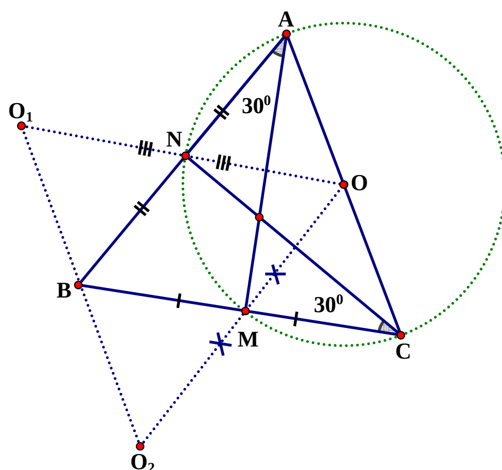
+ Có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MO}$, mà theo đề bài $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2.\overrightarrow{MO} \Rightarrow$ O là trung điểm MM'.

$\Rightarrow$ M' = Đ$_O$(M). Từ (1) $\Rightarrow$ quỹ tích M' là đường tròn (C') = Đ$_O$((C)).

Do đường tròn (C) có tâm O chính là tâm đối xứng $\Rightarrow (C) \equiv (C') \Rightarrow$ quỹ tích M' là đường tròn tâm O là trung điểm AB, bán kính bằng 1.

Bài 7: ΔABC; AM và CN là các trung tuyến. Xác định dạng của ΔABC, biết $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$



Hướng dẫn: ***(Cách giải của THCS)***

+ Do $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ nên tứ giác ACMN nội tiếp đường tròn (O;R).

$\Rightarrow \widehat{MON} = 60^0$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm)

+ ΔABM vuông tại M, $\widehat{MAB} = 30^0 \Rightarrow AB = 2BM$

+ Tương tự ta có BC = 2BN

+ Mà BC = 2BM; AB = 2BN $\Rightarrow BC = BA$

+ Có $\widehat{ABC}=\dfrac{sd\widehat{AC}-sd\widehat{MN}}{2}=\dfrac{180^0-60^0}{2}=60^0$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn). Vậy ΔABC đều.

Cách giải dùng đối xứng trục:

+ $Đ_N: O\to O_1$ và $A\to B\Rightarrow Đ_N: OA\to O_1B\Rightarrow\begin{cases}OA=O_1B\\OA//O_1B\end{cases}$

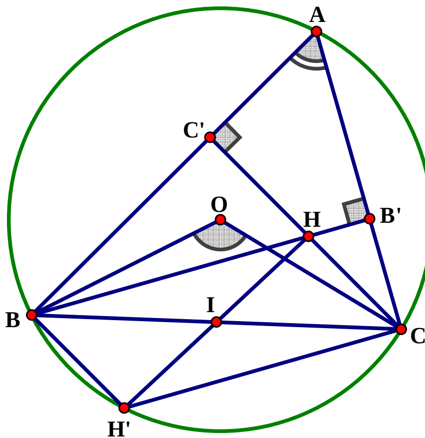
+ $Đ_M: O\to O_2$ và $C\to B\Rightarrow Đ_M: OC\to O_2B\Rightarrow\begin{cases}OC=O_2B\\OC//O_2B\end{cases}$

+ Mà A, O, C thẳng hàng nên $O_1;B;O_2$ thẳng hàng. O là trung điểm AC nên B là trung điểm O_1O_2

+ ΔO_1OO_2 đều $\Rightarrow O_1O_2=2R\Rightarrow\Delta ABC\backsim\Delta OO_1O_2\Rightarrow\Delta ABC$ đều.

Bài 8: (Tương tự bài 5) ΔABC nội tiếp đường tròn (O;R); $BC=R\sqrt{3}$ cố định. A thay đổi trên đường tròn. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABC

Hướng dẫn:



+ Có $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Rightarrow\sin\widehat{BAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=60^0\Rightarrow\widehat{BOC}=120^0$

+ Xét phép đối xứng tâm I (I là trung điểm BC)

$\left.\begin{array}{r}Đ_I: H\to H'\Rightarrow IH=IH'\\ B\to C\Rightarrow IB=IC\end{array}\right\}\Rightarrow BHCH'$ là hình bình hành.

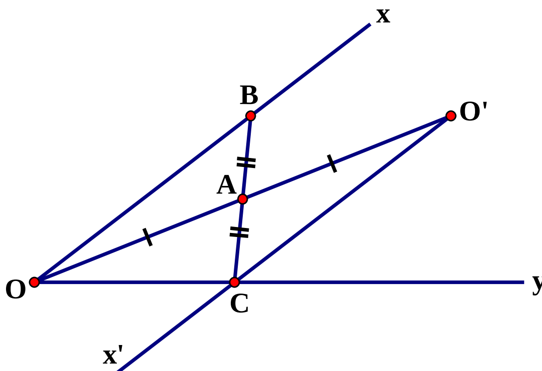
$\widehat{BH'C}=\widehat{BHC}=180^0-\widehat{A}$ (Do $\widehat{BHC}=\widehat{B'HC'}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{B'HC'}=180^0-\widehat{A}$ (do tứ giác AB'HC' nội tiếp))

$\Rightarrow\widehat{BH'C}+\widehat{A}=180^0\Rightarrow$ ABH'C nội tiếp $\Rightarrow H'\in(O;R)$

+ Vì $Đ_I: H'\to H; (O;R)\to(O';R)\Rightarrow$ Quỹ tích H là đường tròn (O';R) đối xứng với (O;R) qua phép đối xứng tâm I.

Bài 9: Cho A nằm trong $\widehat{xOy}$. Tìm $B\in Ox; C\in Oy$ sao cho A là trung điểm BC.

Hướng dẫn:



Cách 1:

+ Xét $Đ_A: O\to O'$; tia $Ox\to O'x'$

+ Dựng $C=O'x'\cap Oy$

+ Khi đó $B=Đ_A(C)$

Bài toán chỉ có nghiệm hình khi O'x' cắt Oy.

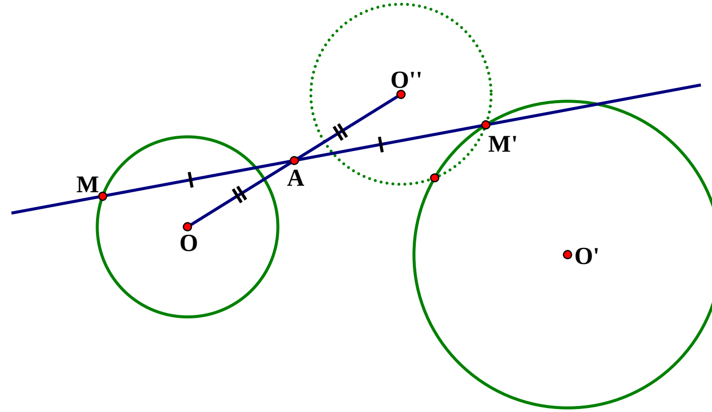
Cách 2:

+ Dựng $\mathbf{O'x' = Đ_A(Ox); C = O'x' \cap Oy \Rightarrow CA \cap Ox = B}$

Bài toán chỉ có nghiệm hình khi O’x’ cắt Oy.

Bài 10: Cho 2 đường tròn (O;R) và (O’;R’), A là một điểm tùy ý. Tìm $\mathbf{M \in (O;R); M' \in (O';R')}$ sao cho A là trung điểm MM’

Hướng dẫn:



+ Gọi $(\mathbf{O''}) = \mathbf{Đ_A(O); M = (O'') \cap (O'); A = MA \cap (O)}$

Bài toán chỉ có nghiệm hình khi 2 đường tròn (O’’) và (O’) cắt nhau.

BÀI HỌC 4: PHÉP QUAY

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

* Quy ước chiều quay của 1 điểm trong mặt phẳng:

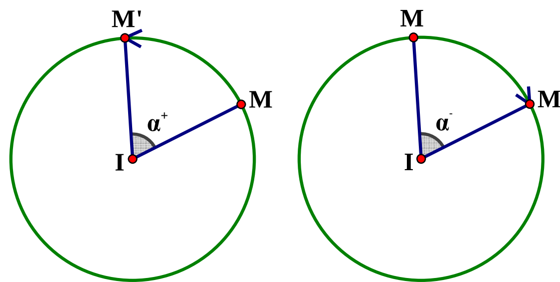
+ Nếu điểm M quay xung quanh điểm I theo chiều ngược kim đồng hồ thì được gọi là chiều dương. Chiều ngược lại (chiều quay của kim đồng hồ) là chiều âm.

* Trong mặt phẳng, cho điểm I, góc , phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho

$$\begin{cases} \mathbf{IM' = IM} \\ \left[\begin{array}{l} \left(\widehat{\mathbf{IM;IM'}}\right) = \ ^{+} \text{ (theo chiều dương)} \\ \left(\widehat{\mathbf{IM;IM'}}\right) = \ ^{-} \text{ (theo chiều âm)} \end{array}\right. \end{cases}$$

Được gọi là phép quay xung quanh tâm I, góc quay .

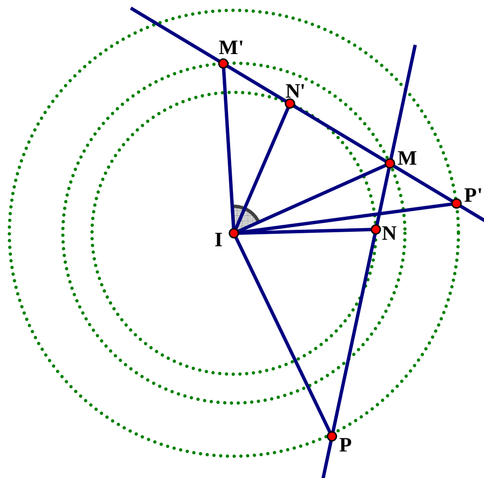
Ký hiệu: $\mathbf{Q_{(I;\ ^{+})} : M \to M'}$ **hoặc** $\mathbf{Q_{(I;\ ^{-})} : M \to M'}$



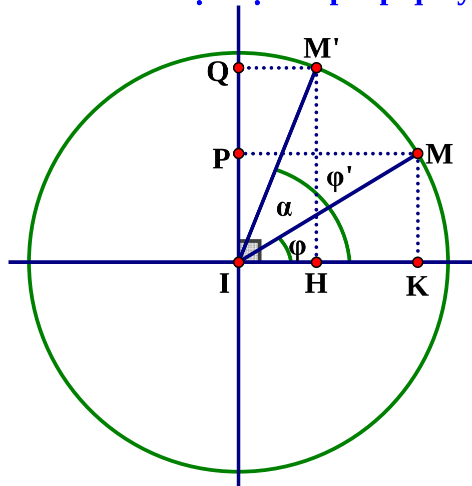
2. Tính chất

Định lý 1: Nếu $\mathbf{Q_{(I;\ )} : MN \to M'N'}$ thì $\begin{cases} \mathbf{M'N' = MN} \\ \left(\widehat{\mathbf{MN;M'N'}}\right) = \end{cases}$

Định lý 2: Nếu 3 điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự , $\mathbf{Q_{(I;\ )} : M, N, P \to M', N', P'}$ thì M', N', P' cũng thẳng hàng theo thứ tự đó.



3. Biểu thức tọa độ của phép quay



Nếu $\mathbf{M(x;y);Q_{(I;\ )}:M\to M'(x';y');I(a;b)}$ thì

$\mathbf{\overrightarrow{IM}=(x-a;y-b);\overrightarrow{IM'}=(x'-a;y'-b)}$

TH1: Xét phép quay theo chiều dương $\mathbf{Q_{(I;\ ^{+})}}$

+ Gọi ; ' lần lượt là góc tạo bởi IM và IM' với trục hoành. $\Rightarrow$ $\mathbf{'-\ =\ ;\ IM=IM'=R}$

+ Ta có: $\begin{cases}\mathbf{x-a=\overline{IK}=IM.\cos\ \ =R.\cos} \\ \mathbf{y-b=\overline{IP}=\overline{MK}=IM.\sin\ \ =R.\sin}\end{cases}$

+ Xét: $\begin{cases}\mathbf{x'-a=\overline{IH}=\overline{QM'}=IM'.\cos\widehat{QM'I}=R.\cos\ '} \\ \mathbf{y'-b=\overline{IQ}=\overline{HM'}=IM'.\sin\widehat{M'IH}=R.\sin\ '}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x'-a=R.\cos(\ +\ )=R.(\cos\ .\cos\ -\sin\ .\sin\ )} \\ \mathbf{y'-b=R.\sin(\ +\ )=R.(\sin\ .\cos\ +\cos\ .\sin\ )}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x'-a=(R.\cos\ )\cos\ -(R.\sin\ ).\sin\ =(x-a).\cos\ -(y-b).\sin} \\ \mathbf{y'-b=(R.\cos\ )\sin\ +(R.\sin\ ).\cos\ =(x-a).\sin\ +(y-b).\cos}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x'=(x-a).\cos\ -(y-b).\sin\ +a} \\ \mathbf{y'=(x-a).\sin\ +(y-b).\cos\ +b}\end{cases}$$

Kết luận: $\mathbf{M(x;y);Q_{(I;\ ^{+})}:M\to M'(x';y');I(a;b)}$ **thì tọa độ M' như sau:**

$$\begin{cases}\mathbf{x'=(x-a).\cos\ -(y-b).\sin\ +a} \\ \mathbf{y'=(x-a).\sin\ +(y-b).\cos\ +b}\end{cases}\quad\mathbf{(I)}$$

TH2: Xét phép quay theo chiều âm $\mathbf{Q_{(I;\ ^{-})}}$

Chứng minh tương tự ta có:

$\mathbf{M(x;y);Q_{(I;\ ^{-})}:M\to M'(x';y');I(a;b)}$ **thì tọa độ M' như sau:**

$$\begin{cases}\mathbf{x'=(x-a).\cos(-\ )-(y-b).\sin(-\ )+a} \\ \mathbf{y'=(x-a).\sin(-\ )+(y-b).\cos(-\ )+b}\end{cases}\quad\mathbf{(II)}$$

HỆ QUẢ:

a) Từ (I), đặt $\begin{cases}\mathbf{u=x-a} \\ \mathbf{v=y-b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{(\cos\ ).u-(\sin\ ).v=x'-a} \\ \mathbf{(\sin\ ).u+(\cos\ ).v=y'-a}\end{cases}$ **(*)**

+ Ta coi (*) là hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn u; v. Xét các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{vmatrix} = 1$$

$$D_u = \begin{vmatrix} x'-a & -\sin \\ y'-b & \cos \end{vmatrix} = (x'-a)\cos \quad + (y'-b)\sin$$

$$D_v = \begin{vmatrix} \cos & x'-a \\ \sin & y'-b \end{vmatrix} = (y'-a)\cos \quad - (x'-a)\sin$$

+ Khi đó hệ (*) có nghiệm:

$$\begin{cases} u = x - a = \dfrac{D_u}{D} = (x'-a)\cos \quad + (y'-b)\sin \\ v = y - b = \dfrac{D_v}{D} = -(x'-a)\sin \quad + (y'-b)\cos \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x'-a)\cos \quad + (y'-b)\sin \quad + a \\ y = -(x'-a)\sin \quad + (y'-b)\cos \quad + b \end{cases}$$

Kết luận: $M(x;y); Q_{(I;\ +)} : M \to M'(x';y'); I(a;b)$ **thì tọa độ M như sau:**

$$\begin{cases} x = (x'-a)\cos \quad + (y'-b)\sin \quad + a \\ y = -(x'-a)\sin \quad + (y'-b)\cos \quad + b \end{cases}$$

b). Chứng minh tương tự ta có:

$M(x;y); Q_{(I;\ -)} : M \to M'(x';y'); I(a;b)$ **thì tọa độ M như sau:**

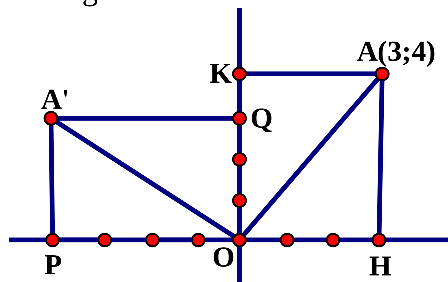
$$\begin{cases} x = (x'-a)\cos(- \quad) + (y'-b)\sin(- \quad) + a \\ y = -(x'-a)\sin(- \quad) + (y'-b)\cos(- \quad) + b \end{cases}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép quay bằng tính toán

Bài 1: Cho A(3;4). Tìm tọa độ $A' = Q_{(O;90^0)}(A)$

Hướng dẫn:



+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên Ox và Oy

+ Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của A’ lên Ox và Oy $\Rightarrow H(3;0); K(0;4)$.

+ Ta có: Hình chữ nhật OQA’P là ảnh của hình chữ nhật OHAK qua phép quay $Q_{(O;90^0)} \Rightarrow Q(0;3); P(-4;0) \Rightarrow A'(-4;3)$

Cách 2: Dùng công thức

$$\begin{cases} x_{A'} = (x_A - 0).\cos 90^0 - (y_A - 0).\sin 90^0 + 0 = -4 \\ y_{A'} = (x_A - 0).\sin 90^0 + (y_A - 0).\cos 90^0 + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(-4;3)$$

Bài 2: Cho A(2;0), d: x + y - 2 = 0. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O, góc quay 90^0

Hướng dẫn:

+ Vì $\mathbf{A(2;0)\in Ox \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} A'\in Oy \\ OA = OA' \end{cases} \Rightarrow A'(0;2)}$

+ Theo đề bài có: $\mathbf{d' = Q_{(O;90^0)}(d) \Rightarrow d' \perp d \Rightarrow d': x - y + c = 0}$

+ Lấy điểm $\mathbf{M(2;0)\in d \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(0;2)\in d' \Rightarrow c = 2 \Rightarrow d': x - y + 2 = 0}$

(Chú ý: $\mathbf{M \equiv A}$)

Bài 3: Cho các điểm A(-3;2); B(-4;5); C(-1;3)
1. Chứng minh rằng các điểm A'(2;3); B'(5;4); C'(3;1) theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép quay tâm O, góc $\mathbf{-90^0}$.
2. Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc $\mathbf{-90^0}$ và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$

Hướng dẫn:
1. + Ta thấy :

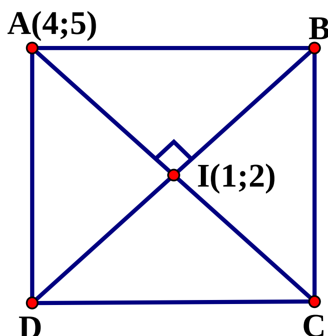
$$\begin{cases} \text{A thuộc góc phần tư thứ II, A' thuộc góc phần tư thứ I nên góc quay } < 0 \\ OA = OA' = \sqrt{13} \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}\right) = 90^0 \end{cases} \Rightarrow A' = Q_{(O,-90^0)}(A)$$

+ Chứng minh tương tự với các điểm B' và C'.
2.
+ Ta có $\mathbf{Q_{(O;-90^0)}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'}$

$$+\ \Delta A_1B_1C_1 = Đ_{Ox}(\Delta A'B'C') \Rightarrow \begin{cases} A_1 = Đ_{Ox}(A') \\ B_1 = Đ_{Ox}(B') \\ C_1 = Đ_{Ox}(C') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(2;-3) \\ B_1(5;-4) \\ C_1(3;-1) \end{cases}$$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có tâm I(1;2). Biết đỉnh A(4;5). Tìm tọa độ B; C; D

Hướng dẫn:



+ Ta có $\mathbf{C = Đ_I(A) \Rightarrow C(-2;-1)}$

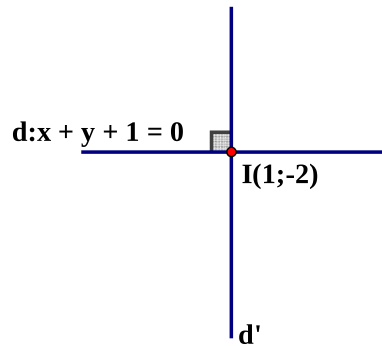
+ $\mathbf{B = Q_{(I;90^{0+})}(A) \Rightarrow B(-2;5)}$ (Áp dụng công thức để tính)

+ $\mathbf{D = Đ_I(B) \Rightarrow D(4;-1)}$

Vì B; D có vai trò giống nhau nên B(-2;5); D(4;-1) hoặc B(4;-1); D(-2;5)

Bài 5: Cho d: x + y + 1 = 0; I(1;-2). Phép quay $\mathbf{Q_{(I;90^{0+})}(d) = d'}$. Tìm phương trình d'

Hướng dẫn:



+ Theo đề bài ta có d' qua I, $\mathbf{d' \perp d \Rightarrow d': x - y - 3 = 0}$

Bài 6: Cho phép quay $\mathbf{Q}_{(O;45^0)}$. Tìm ảnh của

a) Điểm M(2;2) qua phép quay $\mathbf{Q}_{(O;45^0)}$ **b)** Đường tròn $\mathbf{(C): (x-1)^2 + y^2 = 4}$

Hướng dẫn:

a) Gọi $\mathbf{M'(x';y') = Q_{(O;45^0)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = (2-0)\cos 45^0 - (2-0)\sin 45^0 + 0 = 0 \\ y' = (2-0)\sin 45^0 + (2-0)\cos 45^0 + 0 = 2\sqrt{2} \end{cases}}$

$\mathbf{\Rightarrow M'(0;2\sqrt{2})}$

b) Gọi I'; R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm $\mathbf{I(1;0)}$, bán kính R = 2 $\mathbf{\Rightarrow R' = R = 2 \Rightarrow I' = Q_{(O;45^0)}(I)}$

Áp dụng công thức tính được $\mathbf{I'\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow (C'): \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4}$

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho phép biến hình $\mathbf{f: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}}$

Hỏi f là phép biến hình gì ?

Hướng dẫn:

+ Ta có: $\mathbf{f: \begin{cases} x' = (x-0)\cos\frac{}{3} - (y-0)\sin\frac{}{3} + 0 \\ y' = (x-0)\sin\frac{}{3} + (y-0)\cos\frac{}{3} + 0 \end{cases}}$

+ Vậy f là phép quay $\mathbf{Q}_{\left(O;\frac{}{3}\right)}$

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy cho $\mathbf{\Delta: 2x - y + 1 = 0}$. Tìm ảnh của đường thẳng $\mathbf{\Delta}$ qua :

a) Phép đối xứng tâm I(1; -2)

b) Phép quay $\mathbf{Q}_{(O;90^0)}$

Hướng dẫn:

a) Đáp số : 2x - y - 9 = 0

b)

* **Cách 1:** Xem bài 2
* **Cách 2:**
+ Gọi $M(x;y)\in\Delta$
+ Gọi $M'(x';y')=Q_{(O;90^0)}(M)\Rightarrow\begin{cases}x'=...=-y\\y'=...=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y'\\y=-x'\end{cases}\Rightarrow M(y';-x')$
+ $M\in\Delta\Rightarrow 2.y'-(-x')+1=0\Leftrightarrow x'+2y'+1=0(*)$
+ Gọi $\Delta'=Q_{(O;90^0)}(\Delta)\Rightarrow M'\in\Delta'$ (**)
+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow\Delta':x+2y+1=0$
* **Cách 3:**
+ Lấy $M(0;1)\in\Delta$, gọi $M'=Q_{(O;90^0)}(M)\Rightarrow M'(-1;0)\in\Delta'=Q_{(O;90^0)}(\Delta)$
+ Lấy $N\left(-\frac{1}{2};0\right)\in\Delta$, gọi $N'=Q_{(O;90^0)}(N)\Rightarrow N'\left(0;-\frac{1}{2}\right)\in\Delta'=Q_{(O;90^0)}(\Delta)$
+ Đường thẳng Δ' cần tìm qua 2 điểm M'; N' nên có phương trình: $x+2y+1=0$

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tìm phép quay Q biến A(-1;5) thành B(5;1)

Hướng dẫn:
+ Ta thấy $\begin{cases}OA=OB=\sqrt{26}\\\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\end{cases}\Rightarrow B=Q_{(O;-90^0)}(A)$ (Do A nằm ở góc phần tư thứ II, B nằm ở góc phần tư thứ I nên góc quay là âm)

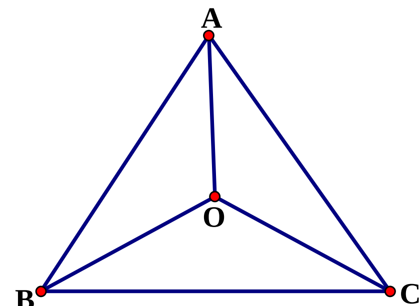
Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy
a) Cho A(0;3). Tìm tọa độ B là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O;-45^0)}$
b) Cho A(4;3). Tìm tọa độ B là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O;60^0)}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức ta có
a) $B\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ b) $B\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2};\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

DẠNG 2: Một số bài toán suy luận quỹ tích

Bài 1: ΔABC đều có tâm O và phép quay $Q_{(O;120^0)}$.
a) Xác định ảnh của các đỉnh A, B, C qua phép quay $Q_{(O;120^0)}$
b) Xác định ảnh của ΔABC qua phép quay $Q_{(O;120^0)}$

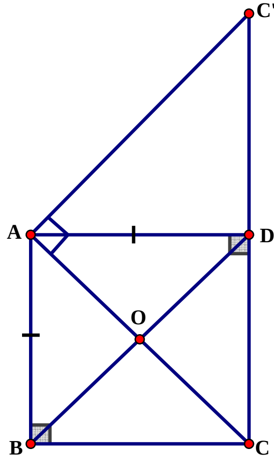
Hướng dẫn: (Khi bài tập cho tam giác hoặc đa giác, nếu không có giải thích gì thêm thì quy ước các đỉnh thứ tự theo chiều dương)



a) Vì :
$\begin{cases}OA=OB=OC\\\widehat{AOC}=\widehat{BOC}=\widehat{COA}=120^0\end{cases}$
$\Rightarrow Q_{(O;120^0)}A\to B;B\to C;C\to A$

b) Theo phần a) $\Rightarrow Q_{(O;120^0)}\Delta ABC \to \Delta ABC$

Bài 2: Cho hình vuông ABCD tâm O
a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay $Q_{(A;90^0)}$ **b)** Tìm ảnh của đường thẳng BC qua $Q_{(O;90^0)}$



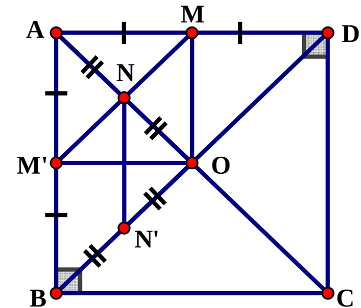
Hướng dẫn:

a) Gọi $C' = Q_{(A;90^0)}(C) \Rightarrow \begin{cases} AC = AC' \\ \widehat{CAC'} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta CAC'$ vuông cân tại A, đường cao AD $\Rightarrow$ B là trung điểm của CC'

b) Có $\begin{cases} Q_{(O;90^0)}(B) = C \\ Q_{(O;90^0)}(C) = D \end{cases} \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(BC) = CD$

Bài 3: Cho hình vuông ABCD tâm O. M là trung điểm AB; N là trung điểm OA. Tìm ảnh của ΔAMN qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$

Hướng dẫn:

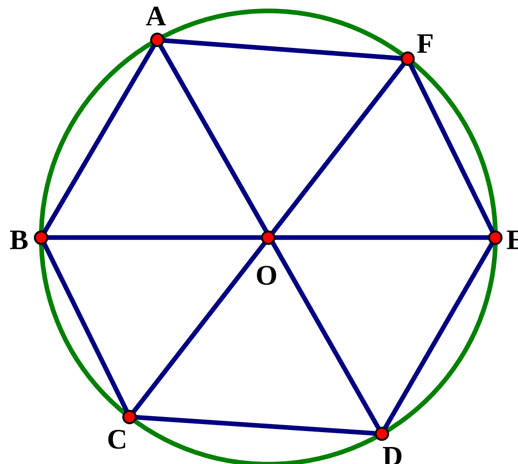


Ta có $Q_{(O;90^0)}: A \to B; M \to M'; N \to N'$ (Trong đó M'; N' lần lượt là trung điểm AB và OB)

$\Rightarrow Q_{(O;90^0)}(\Delta AMN) = \Delta BM'N'$

Bài 4: Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tìm ảnh của ΔOAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp $Q_{(O;60^0)}$ và $T_{\overrightarrow{OE}}$

Hướng dẫn:



+ Ta có $Q_{(O;60^0)}: O \to O; A \to B; B \to C \Rightarrow Q_{(O;60^0)}: \Delta OAB \to \Delta OBC$

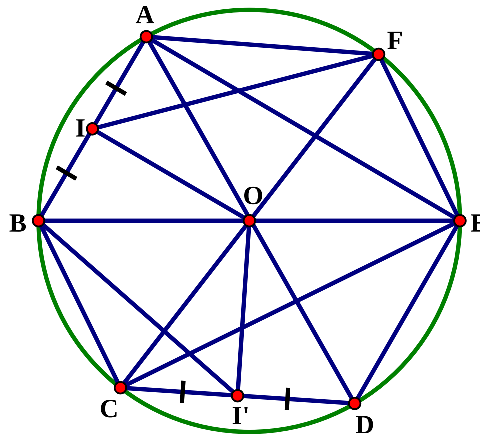
+ $T_{\overrightarrow{OE}}: O \to E; B \to O; C \to D \Rightarrow T_{\overrightarrow{OE}}: \Delta OBC \to \Delta EOD$

+ Vậy ảnh của ΔOAB qua phép dời hình đã cho là ΔEOD

Bài 5: Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. I là trung điểm AB.

a) Tìm ảnh của ΔAIF qua phép quay $Q_{(O;120^0)}$

b) Tìm ảnh của ΔAOF qua phép quay $Q_{(E;60^0)}$



Hướng dẫn:

a) Ta có $Q_{(O;120^0)}: A \to C; I \to I'; F \to B \Rightarrow Q_{(O;120^0)}: \Delta AIF \to \Delta CI'B$

(Trong đó I' là trung điểm CD)

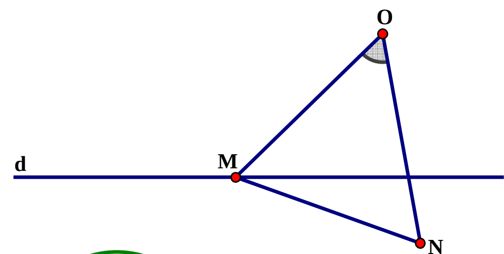
b) Ta có $Q_{(E;60^0)}: A \to C; O \to D; F \to O \Rightarrow Q_{(E;60^0)}: \Delta AOF \to \Delta CDO$

Bài 6: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d. M là điểm di động trên d. Hãy tìm tập hợp các điểm N sao cho ΔOMN đều.

Hướng dẫn:

+ Vì ΔOMN đều và O cố định $\Rightarrow N = Q_{(O;-60^0)}(M)$

+ Mà $M \in d \Rightarrow N \in d' = Q_{(O;-60^0)}(d)$

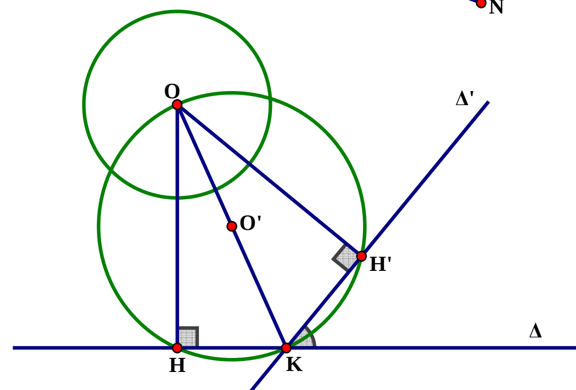


Bài 7: Cho đường tròn (O;R) cố định và đường thẳng Δ không cắt đường tròn. Hãy dựng ảnh của Δ qua phép quay $Q_{(O;30^0)}$

Hướng dẫn:

+ Từ O hạ $OH \perp \Delta$ tại H $\Rightarrow H \in \Delta$.

+ Gọi $H' = Q_{(O;30^0)}(H) \Rightarrow \begin{cases} OH = OH' \\ \widehat{HOH'} = 30^0 \end{cases}$



+ Giả sử dựng được $\Delta' = Q_{(O;30^0)}(\Delta) \Rightarrow H' \in \Delta'; OH' \perp \Delta'$

+ Gọi $K = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow$ tứ giác $HOH'K$ nội tiếp

Cách dựng:

+ Từ O dựng $OH \perp \Delta$ tại H $\Rightarrow H \in \Delta$.

+ Dựng $H' = Q_{(O;30^0)}(H) \Rightarrow \begin{cases} OH = OH' \\ \widehat{HOH'} = 30^0 \end{cases}$

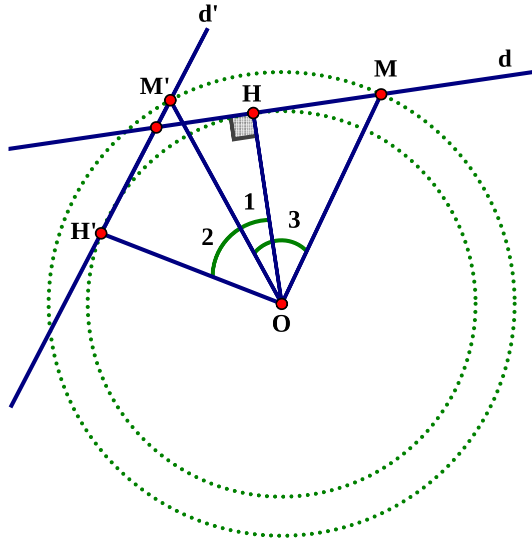
+ Dựng đường tròn (O') qua 3 điểm H, O, H'

+ Dựng $K = (O') \cap \Delta$

+ Đường thẳng Δ' qua 2 điểm H' và K là đường thẳng cần tìm.

Bài 8: Tìm $d' = Q_{(O;60^0)}(d)$

Hướng dẫn:



+ Gọi H là hình chiếu của O lên d, vì O cố định nên H cố định

+ Gọi $H' = Q_{(O;60^0)}(H) \Rightarrow \begin{cases} OH' = OH \ (1) \\ \left(\widehat{OH, OH'}\right) = 60^0 \Rightarrow \widehat{HOH'} = 60^0 \end{cases}$

+ Gọi M là điểm bất kỳ trên d và $M' = Q_{(O;60^0)}(M) \Rightarrow \begin{cases} OM = OM' \ (2) \\ \left(\widehat{OM, OM'}\right) = 60^0 \Rightarrow \widehat{MOM'} = 60^0 \end{cases}$

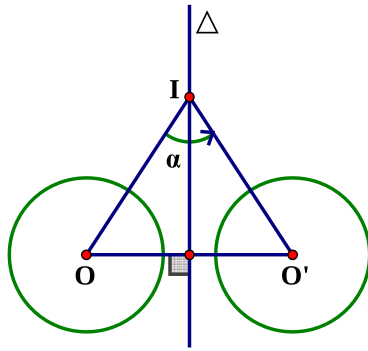
+ Có $\begin{cases} \hat{O}_2 = \widehat{HOH'} - \hat{O}_1 = 60^0 - \hat{O}_1 \\ \hat{O}_3 = \widehat{MOM'} - \hat{O}_1 = 60^0 - \hat{O}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3 (3)$

+ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \Delta OH'M' = \Delta OHM (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OH'M'} = 90^0$

Vậy quỹ tích M' là d' qua M' vuông góc OH' tại H'

Bài 9: Cho đường tròn (O;R) và (O';R) bằng nhau. Hãy chỉ ra một phép quay biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Hướng dẫn:



+ Gọi Δ là trung trực OO'.
+ I là điểm bất kỳ thuộc Δ
+ Đặt $= \left(\widehat{IO;IO'}\right)$
$\Rightarrow Q_{(I;\ )}(O;R) = (O';R)$
Có vô số phép quay thỏa mãn yêu cầu bài toán.

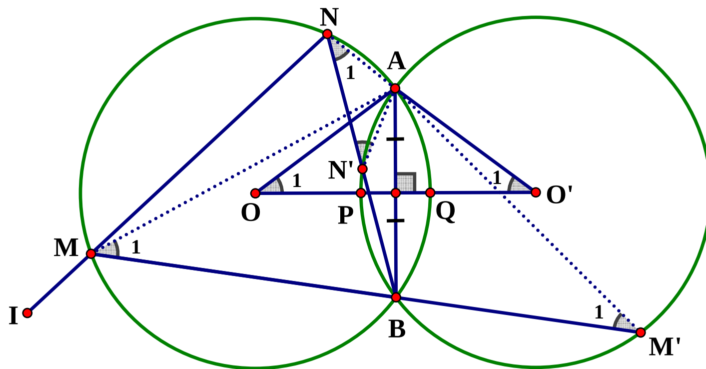
Nhận xét:

+ Khi 2 đường tròn (O) và (O') bằng nhau cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B thì A và B sẽ là 2 tâm quay của phép quay $Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}; Q_{\left(B;\widehat{OBO'}\right)}$ biến đường tròn này thành đường tròn kia.

+ Giả sử lấy A làm tâm quay, và $Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}(O) = (O')$. Đường thẳng (d) qua B cắt (O); (O') lần lượt tại M; M'. Đường thẳng (d') qua B cắt (O); (O') lần lượt tại N; N'. Khi đó :
$Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}(M) = M'; Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}(N) = N'$ (Xem cách chứng minh ở bài tập 9 và ứng dụng của nó)

Bài 10: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Từ I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O). MB và NB cắt (O') tại M', N'. Chứng minh rằng:
1). $M' = Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}(M); N' = Q_{\left(A;\widehat{OAO'}\right)}(N)$
2). Đường thẳng M'N' luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn:



+ Theo bài 1 trang 23 ta có: $Q_{(A;\ )}(O) = (O')$ trong đó $= \left(\widehat{AO;AO'}\right)$

+ $\widehat{O'}_1 = sd\widehat{AP} = \dfrac{sd\widehat{AB}}{2} = \widehat{M'}_1$

+ Tương tự có: $\widehat{O}_1 = sd\widehat{AQ} = \dfrac{sd\widehat{AB}}{2} = \widehat{M}_1$

+ Do 2 đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên $\Delta AOO'; \Delta AMM'$ cân tại O có góc đáy bằng nhau nên $\widehat{MAM'} = \widehat{OAO'} =$

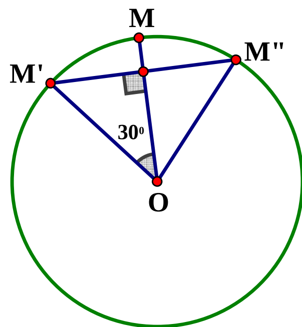
$\Rightarrow A_{(A;\ )}(M) = M'(1)$

+ Có $\widehat{N_1} = \widehat{M_1} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}; \widehat{NN'A} = 180^0 - \widehat{AN'B} = 180^0 - (180^0 - \widehat{M_1}) = \widehat{M_1} \Rightarrow \Delta NAN'; \Delta AOO'$ cân tại O có góc đáy bằng nhau nên $\widehat{NAN'} = \widehat{OAO'} = \quad \Rightarrow Q_{(A;\ )}(N) = N'(2)$

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q_{(A;\ )}(MN) = M'N'$. Do MN luôn đi qua điểm I cố định nên M'N' luôn đi qua điểm I' cố định, với $I' = Q_{(A;\ )}(I)$

Bài 11: Cho đường tròn (O;R), $M \in (O;R); M' = Q_{(O;30^0)}(M); M'' = Đ_{OM}(M')$
Chứng minh rằng $\Delta OM'M''$ là tam giác đều.

Hướng dẫn:



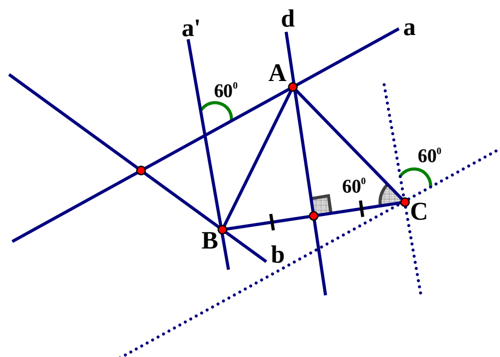
+ $M' = Q_{(O;30^0)}(M) \Rightarrow \begin{cases} OM' = OM = R \\ \widehat{MOM'} = 30^0 \end{cases} (1) \Rightarrow M' \in (O;R)$

+ $M'' = Đ_{OM}(M') \Rightarrow \begin{cases} OM'' = OM' = R \\ \text{OM là trung trực của M'M''} \end{cases} (2)$

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} OM' = OM'' \\ \widehat{M'OM''} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta OM'M''$ là tam giác đều.

Bài 12: Cho 2 đường thẳng a và b, điểm C không nằm trên a và b. Hãy tìm trên a và b lần lượt 2 điểm A, B sao cho ΔABC đều.

Hướng dẫn:



+ $B = Q_{(C;60^0)}(A)$ (1), do $A \in a$ nên:

+ Gọi $Q_{(C;60^0)}(a) = a'$

+ Do $A \in a; B \in b; (1) \Rightarrow B \in a' \Rightarrow B = a' \cap b$

+ $A = d \cap a$ (d là trung trực của BC)

Bài toán chỉ có nghiệm hình khi a' cắt b.

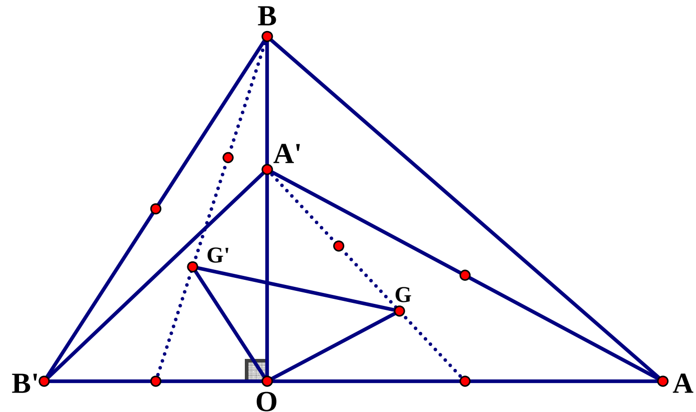
Bài 13: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên AB' và nằm ngoài A'B. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh rằng GOG' là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn:

+ Ta có: $\begin{cases} Q_{(O;90^0)}(A) = B \\ Q_{(O;90^0)}(A') = B' \end{cases} \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(\Delta OAA') = \Delta OBB' \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(G) = G'$

$\Rightarrow \begin{cases} OG = OG' \\ \left(\widehat{OG;OG'}\right) = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta GOG'$ vuông cân tại O.

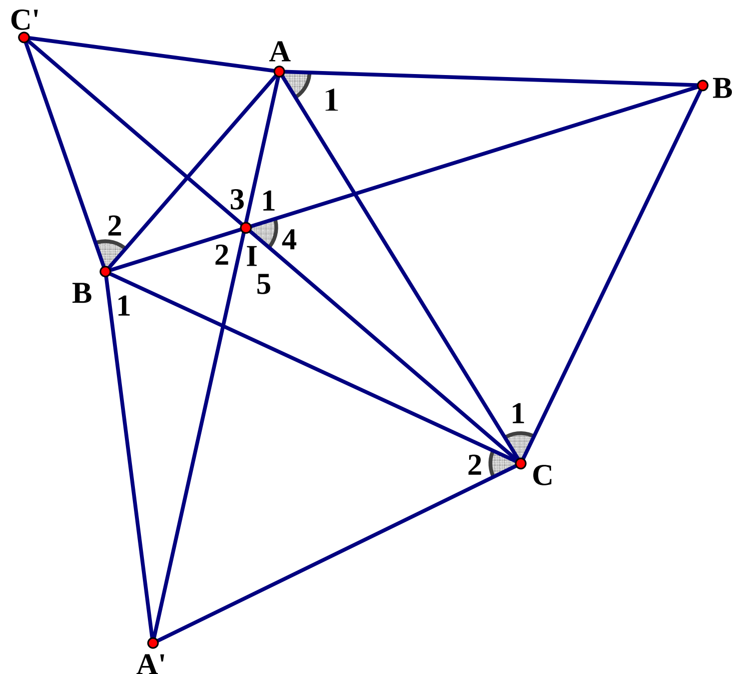


Bài 14: Cho ΔABC, về phía ngoài ΔABC, dựng các tam giác đều: ABC'; BCA'; ACB'. Chứng minh rằng:

1. AA' = BB' = CC'

2. Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy

Hướng dẫn:



1.

+ Ta có $\left.\begin{matrix} Q_{(C;60^0)}(B) = A' \\ (B') = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q_{(C;60^0)}(BB') = A'A \Rightarrow AA' = BB'(1)$

+ Chứng minh tương tự ta có BB' = CC' (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow AA' = BB' = CC'$

2. Phương pháp: $\begin{cases} \text{+ Gọi } I = AA' \cap BB' \\ \text{+ Chứng minh } C';I;C \text{ thẳng hàng} \end{cases}$

+ Vì $Q_{(C;60^0)}(BB') = A'A \Rightarrow \left(\widehat{AA';BB'}\right) = 60^0 \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 60^0$;$(I = AA' \cap BB')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{I}_1 = \hat{C}_1 = 60^0 \Rightarrow \text{ Tứ giác IAB'C nội tiếp} \Rightarrow \hat{I}_4 = \hat{A}_1 = 60^0 = \dfrac{\overset{\frown}{B'C}}{2} \\ \hat{I}_2 = \hat{C}_2 = 60^0 \Rightarrow \text{ Tứ giác AIBC' nội tiếp} \Rightarrow \hat{I}_5 = \hat{B}_1 = 60^0 = \dfrac{\overset{\frown}{A'C}}{2} \end{cases}$$

+ $\hat{I}_1 = 60^0 \Rightarrow \widehat{AIB} = 120^0$, mà $\widehat{AC'B} = 60^0 \Rightarrow$ **Tứ giác AC'BI nội tiếp**

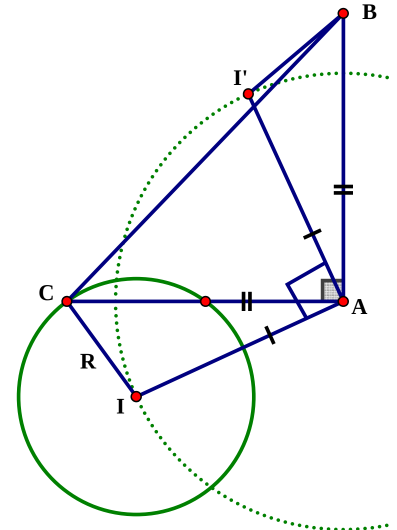
$\Rightarrow \hat{I}_3 = \hat{B}_2 = 60^0 \Rightarrow \widehat{C'IC} = \hat{I}_3 + \hat{I}_1 + \hat{I}_4 = 180^0 \Rightarrow C', I, C$ **thẳng hàng.**

Vậy ba đường thẳng AA’, BB’, CC’ đồng quy.

Bài 15: ΔABC vuông cân tại A, A cố định (các đỉnh được vẽ theo chiều dương). Biết $C \in (I;R)$.

Tìm ảnh của đường tròn (I;R) qua $Q_{(A;-90^0)}$

Hướng dẫn:



+ Theo GT $\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overset{\frown}{AC;AB}\right) = 90^0 \end{cases} \Rightarrow B = Q_{(A;-90^0)}(C)$

+ Gọi $I' = Q_{(A;-90^0)}(I) \Rightarrow I'$ cố định $\Rightarrow \begin{cases} AI = AI' \\ \left(\overset{\frown}{AI;AI'}\right) = 90^0 \end{cases}$

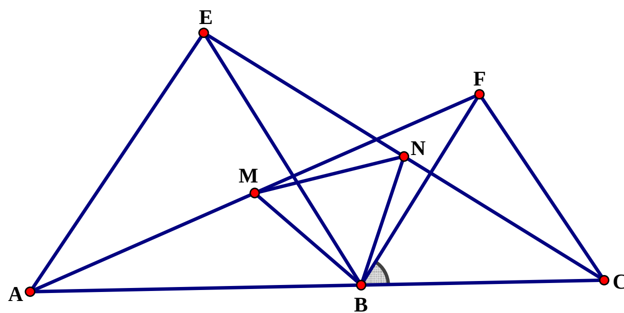
+ Như vậy ta có

$: \begin{cases} Q_{(A;-90^0)}(I) = I' \\ Q_{(A;-90^0)}(C) = B \end{cases} \Rightarrow Q_{(A;-90^0)}(IC) = I'B \Rightarrow I'B = R$ không đổi.

Vậy quỹ tích B là đường tròn $(I';R) = Q_{(A;-90^0)}(I;R)$

Bài 16: Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự trên thẳng hàng. Vẽ cùng một phía hai tam giác đều ABE và BCF. Gọi M; N tương ứng là 2 trung điểm của AF và EC. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.

Hướng dẫn:



+ Xét

$\begin{cases} Q_{(B;-60^0)}(A) = E \\ Q_{(B;-60^0)}(F) = C \end{cases} \Rightarrow Q_{(B;-60^0)}(AF) = EC$

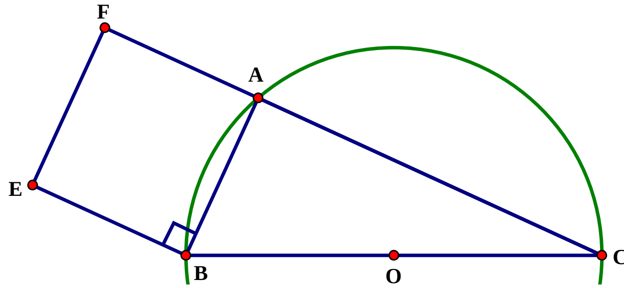
+ Do M là trung điểm AF; N là trung điểm EC nên

$Q_{((B;-60^0))}(M) = N \Rightarrow \begin{cases} BM = BN \\ \left(\overset{\frown}{BM;BN}\right) = 60^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BMN$ là tam giác đều.

Bài 17: Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC. A chạy trên nửa đường tròn. Dựng về phía ngoài ΔABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên nửa đường tròn cố định.

Hướng dẫn:



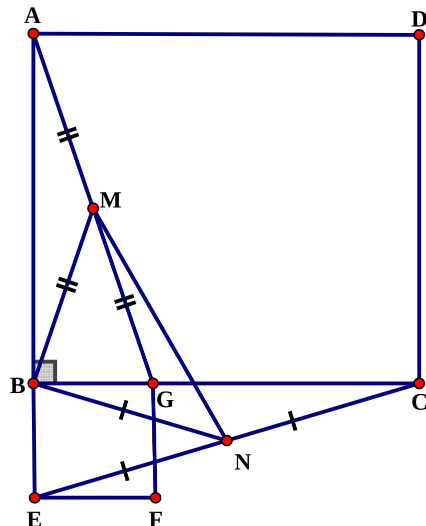
+ Vì $Q_{(B;90^0)}(A)=E$, mà A chạy trên nửa đường tròn (O), đường kính AB nên E chạy trên nửa đường tròn (O'), đường kính AB, trong đó $(O')=Q_{(B;90^0)}(O)$

Bài 18: Cho hình vuông ABCD và BEFG (trong đó A, B, E thẳng hàng; G nằm trên cạnh BC)

a) Tìm ảnh của ΔABG qua phép quay $Q_{(B;-90^0)}$

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG và CE. Chứng minh rằng ΔBMN vuông cân

Hướng dẫn:



a) Ta có

$Q_{(B;-90^0)}: A\to C; B\to B; G\to E \Rightarrow Q_{(B;-90^0)}: \Delta ABG \to \Delta CBE$

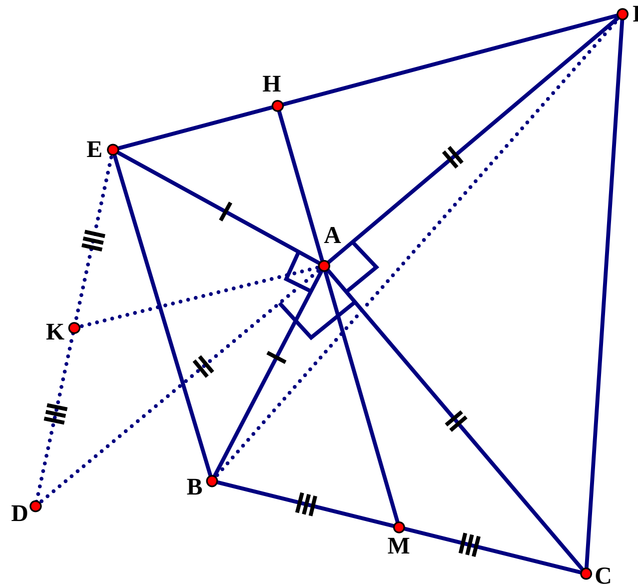
b) Theo phần a) $Q_{(B;-90^0)}: AG \to CE$. Mà M là trung điểm AG, N là trung điểm CE

$\Rightarrow Q_{(B;-90^0)}: M\to N \Rightarrow \begin{cases} BM=BN \\ \widehat{MBN}=90^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta BMN$ vuông cân tại B.

Bài 19: Cho ΔABC, qua A dựng 2 tam giác vuông cân ABE tại A và ACF tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Giả sử AM cắt FE tại H.

Chứng minh rằng AH là đường cao của ΔAEF

Hướng dẫn:



+ Ta có $\mathbf{Q}_{\left(A;-90^0\right)}:\mathbf{B}\to\mathbf{E};\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ (Trong đó D = $Đ_A$(F)) $\Rightarrow \mathbf{Q}_{\left(A;-90^0\right)}:\mathbf{BC}\to\mathbf{ED}$

+ Do M là trung điểm BC $\Rightarrow \mathbf{Q}_{\left(A;-90^0\right)}:\mathbf{M}\to\mathbf{K}$ (K là trung điểm ED)

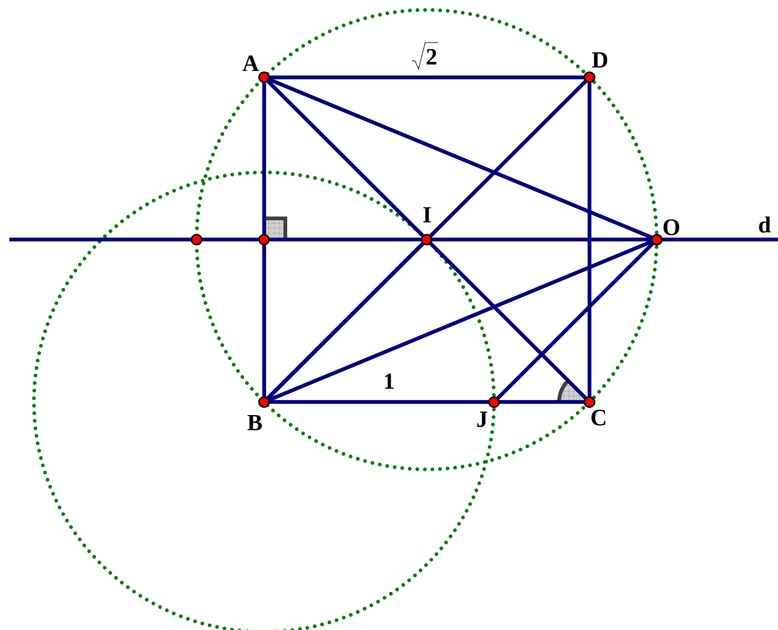
$\Rightarrow \widehat{\mathbf{KAM}}=\mathbf{90^0}\Rightarrow \mathbf{AK}\perp\mathbf{AM}$ **(1)**

+ $\Delta\mathbf{DEF}$ có AK là đường trung bình $\Rightarrow \mathbf{AK}//\mathbf{EF}$ **(2)**

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \mathbf{EF}\perp\mathbf{AM}\Rightarrow\mathbf{EF}\perp\mathbf{AH}\Rightarrow$ AH là đường cao của $\Delta\mathbf{AEF}$

Bài 20: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $\sqrt{2}$, các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy BJ = 1. Xác định phép quay biến AI thành BJ.

Hướng dẫn:



+ Gọi O là giao điểm của đường thẳng d là trung trực của CD với đường tròn (I) ngoại tiếp ABCD. Khi đó ta có : $\Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{\widehat{AIB}}{2} = 45^0$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm);

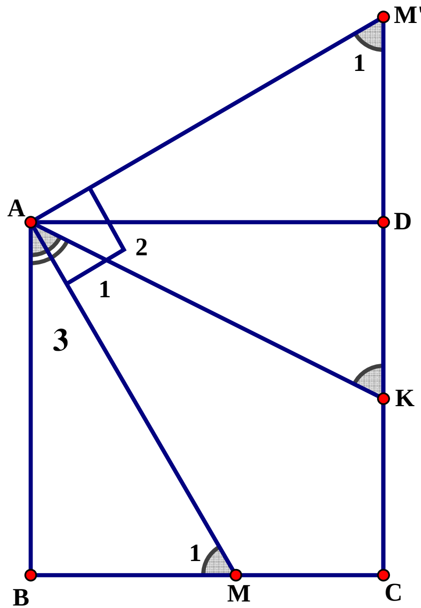
$OI = JB = 1; OI // JB \Rightarrow$ OIBJ là hình bình hành $\Rightarrow OJ = IB = 1 \Rightarrow$ OIBJ là hình thoi

$\Rightarrow \widehat{IOJ} = \widehat{CBD} = 45^0$. Từ đó :

+ Ta có : $Q_{(O;45^0)}: A \to B; I \to J \Rightarrow Q_{(O;45^0)}: AI \to BJ$

Bài 21: Cho hình vuông ABCD, $M \in BC; K \in DC$ sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{MAK}$. Chứng minh $AK = BM + KD$

Hướng dẫn:



+ Ta có

$Q_{(A;90^0)}: B \to D; M \to M' \Rightarrow Q_{(A;90^0)}: BM \to DM' \Rightarrow BM = DM'$

+ Vậy $BM + KD = DM' + KD$

Cần chứng minh:

$\begin{cases} M', D, K \text{ thẳng hàng} \\ \Delta AKM' \text{ cân tại } K \end{cases} \Rightarrow DM' + KD = KM'$

+ Thật vậy:

$Q_{(A;90^0)}(BM) = DM' \Rightarrow \left(\widehat{BM; DM'}\right) = 90^0 \Rightarrow BM \perp DM'$

, mà BM // AD $\Rightarrow AD \perp DM' \Rightarrow \widehat{ADM'} = 90^0$; do $\widehat{ADK} = 90^0 \Rightarrow M'; D; K$ thẳng hàng.

+ Theo chứng minh trên ta có:

$Q_{(A;90^0)}: \Delta ABM \to \Delta ADM' \Rightarrow \Delta ABM = \Delta ADM' \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M'}_1$

+ Có $\widehat{M'AK} + \widehat{A}_1 = 90^0 \Rightarrow \widehat{M'AK} + \widehat{A}_3 = 90^0$ (Do $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$), mà

$\widehat{M}_1 + \widehat{A}_3 = 90^0 \Rightarrow \widehat{M'AK} = \widehat{M}_1 \Rightarrow \Delta AKM$ cân tại K

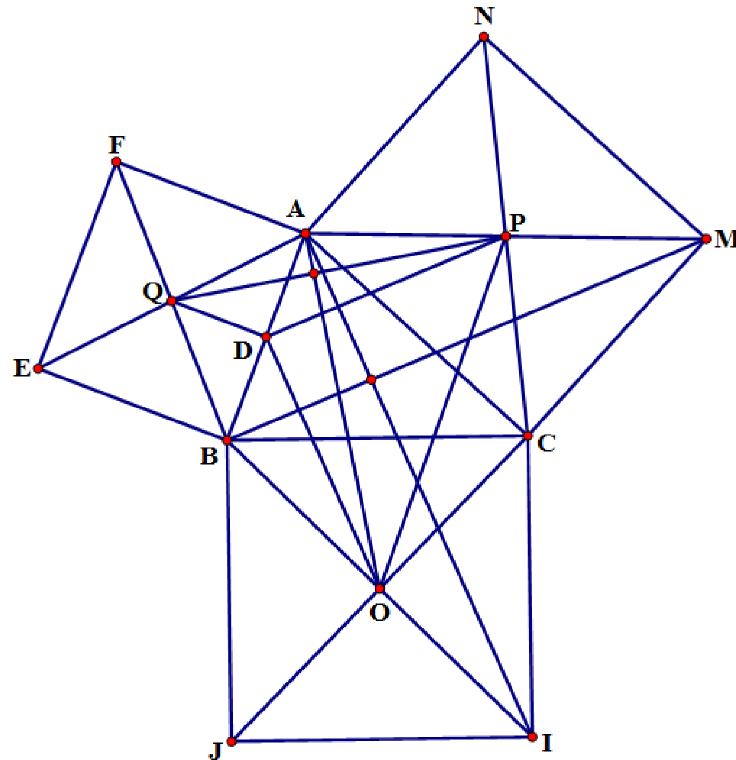
$\Rightarrow KM' = KD + DM' = KA \Rightarrow KD + BM = KA$

Bài 22: Cho ΔABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ΔDOP vuông cân tại D

b) Chứng minh rằng $AO \perp PQ; AO = PQ$

Hướng dẫn:



a) Ta có $Q_{(C;90^0)}: M \to A; B \to I \Rightarrow Q_{(C;90^0)}: MB \to AI \Rightarrow MB = AI$

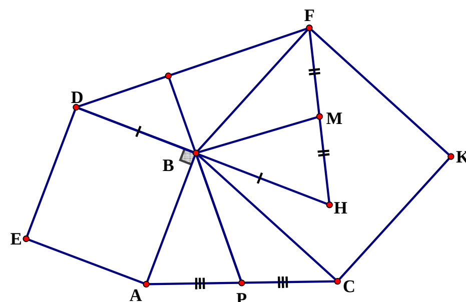
+ Mà $\begin{cases} DP // = \frac{1}{2}BM \\ DO // = \frac{1}{2}AI \\ D, O, P \text{ không thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow DP \perp = DO \Rightarrow \Delta DOP$ **vuông cân tại D**

b) Theo a có: $Q_{(D;90^0)}: O \to P; A \to Q \Rightarrow Q_{(D;90^0)}: OA \to PQ \Rightarrow \begin{cases} OA = PQ \\ OA \perp PQ \end{cases}$

Bài 23: Cho ΔABC có các đỉnh ký hiệu theo hướng âm. Dựng về phía ngoài tam giác đó các hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm AC, H là điểm đối xứng của D qua B. M là trung điểm của đoạn FH.

a) Xác định ảnh của hai vec tơ $\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BP}$ trong phép quay $Q_{(B;90^0)}$

b) Chứng minh rằng: $DF \perp DP; DF = 2BP$



Hướng dẫn:

a) Ta có: $Q_{(B;90^0)}: BH \to BA$;

$Q_{(B;90^0)}: A \to H; C \to F \Rightarrow Q_{(B;90^0)}: AC \to HF$

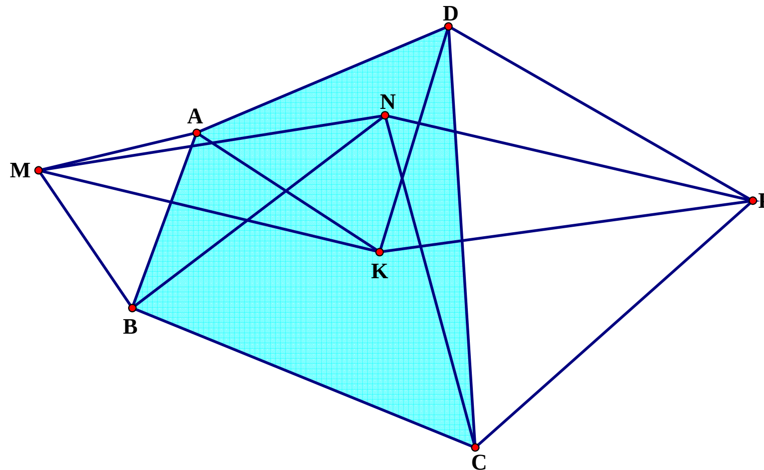
+ Mà P là trung điểm AC; M là trung điểm HF $\Rightarrow \mathbf{Q}_{(B;90^0)}: \mathbf{P} \to \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{Q}_{(B;90^0)}: \overrightarrow{\mathbf{BP}} \to \overrightarrow{\mathbf{BM}}$

b) Vì $\mathbf{Q}_{(B;90^0)}: \overrightarrow{\mathbf{BP}} \to \overrightarrow{\mathbf{BM}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{BP} = \mathbf{BM} \\ \mathbf{BP} \perp \mathbf{BM} \end{cases}$

+ Mà $\mathbf{BM} // = \dfrac{1}{2}\mathbf{DF} \Rightarrow \mathbf{BP} \perp= \dfrac{1}{2}\mathbf{DF}$

Bài 24: Cho tứ giác ABCD. Về phía ngoài của tứ giác dựng các tam giác đều ABM, CDP. Về phía trong tứ giác, dựng hai tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh MNPK là hình bình hành.

Hướng dẫn:



+ Ta có: $\mathbf{Q}_{(B;60^0)}: \mathbf{A} \to \mathbf{M}; \mathbf{C} \to \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{Q}_{(B;60^0)}: \mathbf{AC} \to \mathbf{MN} \Rightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{MN}$ **(1)**

+ Ta có: $\mathbf{Q}_{(D;60^0)}: \mathbf{C} \to \mathbf{P}; \mathbf{A} \to \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{Q}_{(B;60^0)}: \mathbf{CA} \to \mathbf{PK} \Rightarrow \mathbf{CA} = \mathbf{PK}$ **(2)**

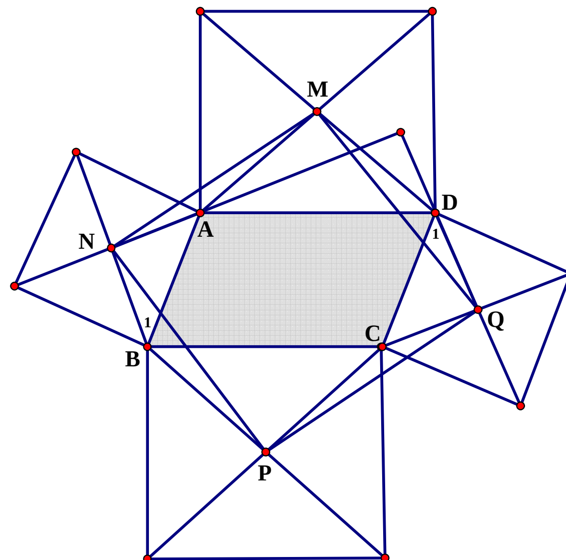
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \mathbf{MN} = \mathbf{PK}$ (*)

+ Chứng minh tương tự ta cũng có: $\mathbf{MK} = \mathbf{PN}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra MNPK là hình bình hành.

Bài 25: Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối tâm các hình vuông dựng trên các cạnh của một hình bình hành về phía ngoài, hợp thành một hình vuông.

Hướng dẫn:



+ Ta có $\Delta DQC = \Delta ANB(g-c-g) \Rightarrow DQ = AN$ (1); mà $DM = AM$ (2)

$$\begin{cases} \widehat{MDQ} = 45^0 + \widehat{ADC} + 45^0 = 90^0 + \left(180^0 - \widehat{BAD}\right) = 270^0 - \widehat{BAD} \\ \widehat{MAN} = 360^0 - \left(45^0 + \widehat{BAD} + 45^0\right) = 270^0 - \widehat{BAD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MDQ} = \widehat{MAN}(3)$$

+ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \Delta DBM = \Delta ANM \Rightarrow \begin{cases} MN = MQ\ (*) \\ \widehat{DMQ} = \widehat{AMN} \end{cases}$

+ Do $\widehat{AMQ} + \widehat{DMQ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMQ} + \widehat{AMN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QMN} = 90^0 (**)$

Chứng minh tương tư ta cũng có: $PN = PQ; \widehat{NPQ} = 90^0 (***)$

Vậy từ (*); (**) và (***) ta có MNPQ là hình vuông.

NX: ta có thể chứng minh được $NA \perp DQ$ như sau:

+ $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = 45^0; AB//CD \Rightarrow NB//DQ$ mà $NB \perp NA \Rightarrow NA \perp DQ$

BÀI HỌC 5: PHÉP VỊ TỰ

(Phép biến hình biến nhỏ thành to - biến to thành nhỏ theo 1 phương nhất định)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

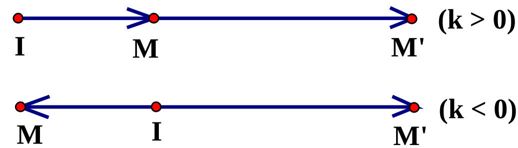
1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho điểm I cố định và số thực k không đổi. Với mỗi điểm M của mặt phẳng, phép biến hình biến M thành M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k.

Ký hiệu: $V_{(I;k)}(M) = M'$

Chú ý:

+ Khi k > 0 thì $\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}$ cùng hướng
(I là tâm vị tự ngoài: I nằm ngoài M và M')
+ Khi k > 0 thì $\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}$ ngược hướng
(I là tâm vị tự trong: I nằm trong M và M')



2. Tính chất:

a. Định lý 1: Nếu $\begin{cases} V_{(I;k)}(M) = M' \\ V_{(I;k)}(N) = N' \end{cases}$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN} \\ M'N' = |k|.MN \end{cases}$

b. Định lý 2: Nếu M, N, P thẳng hàng theo thứ tự thì $V_{(I;k)}: M, N, P \to M', N', P'$ cũng thẳng hàng theo thứ tự đó.

c.

+ Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó :
($V_{(I;k)}(d) = d'$ nếu $I \in d \Rightarrow d' \equiv d$, $I \notin d \Rightarrow d // d'$)

+ Phép vị tự biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó.

CHÚ Ý:

(1) Nếu $V_{(I;k)}(M) = M'$ và M' có quỹ tích là hình (H) thì M có quỹ tích là hình $(H') = V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(H)$

(2) Với 2 đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ bất kỳ, bao giờ cũng có ít nhất một phép vị tự $V_{(I;k)}(O_1;R_1) = (O_2;R_2)$, trong đó:

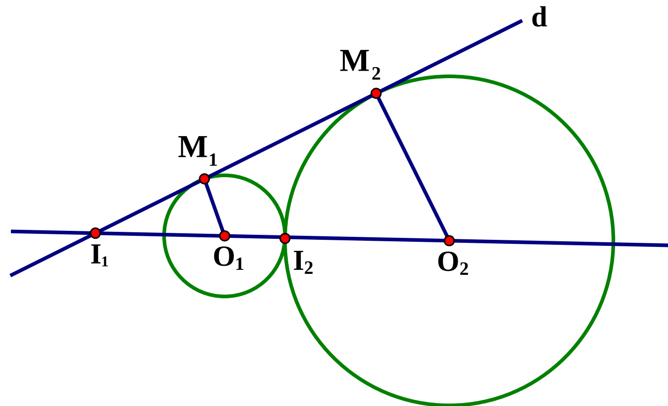
(a) Tâm vị tự I xác định BẰNG CÁCH NHƯ SAU:
(+) I là tiếp điểm của 2 đường tròn (nếu 2 đường tròn tiếp xúc nhau)
(+) I là tâm 2 đường tròn (nếu 2 đường tròn đồng tâm)
(+) I là giao điểm của d và đường nối tâm 2 đường tròn
(trong đó đường thẳng d đi qua M, N với $M_1 \in (O_1;R_1); M_2 \in (O_2;R_2); O_1M_1 // O_2M_2$)

(b) Tỉ số vị tự k xác định BẰNG $\overline{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ (độ dài đại số của tỉ số 2 bán kính)

(+) $k = \frac{R_2}{R_1} > 0$ nếu I nằm ngoài đoạn O_1O_2 (I là tâm vị tự ngoài)

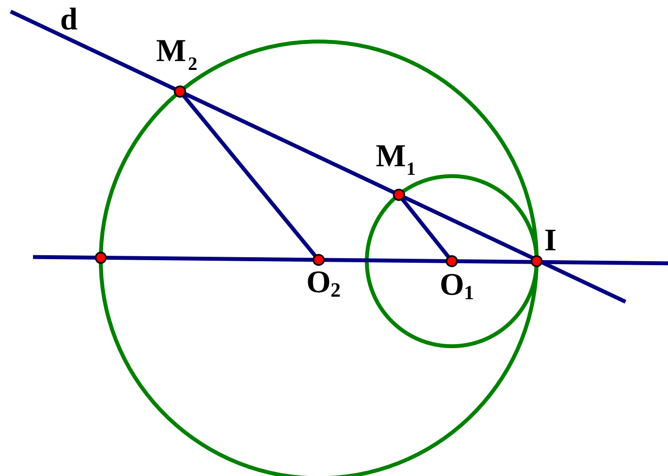
(+) $k=-\frac{R_2}{R_1}<0$ nếu I nằm trong đoạn O_1O_2 (I là tâm vị tự trong)

TH1: Đường tròn $(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài đường tròn $(O_2;R_2) \Leftrightarrow R_1+R_2=I_1I_2$



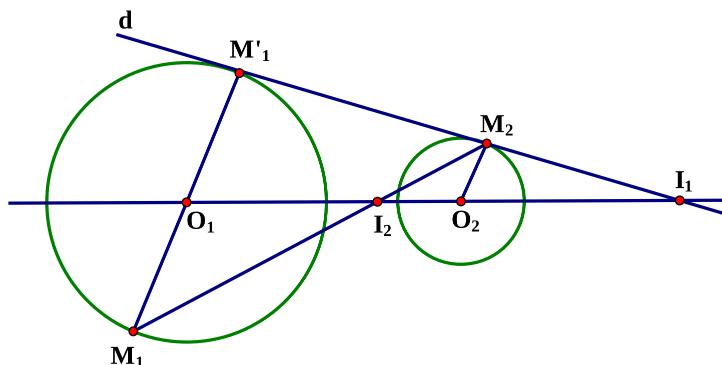
Có 2 phép vị tự:
+ $V_{\left(I_1;\frac{R_2}{R_1}\right)}(O_1;R_1)=(O_2;R_2)$
(I_1 là tâm vị tự ngoài, k > 0)
+ $V_{\left(I_2;-\frac{R_2}{R_1}\right)}(O_1;R_1)=(O_2;R_2)$
(I_1 là tâm vị tự trong, k < 0)

TH2: Đường tròn $(O_1;R_1)$ tiếp xúc trong đường tròn $(O_2;R_2) \Leftrightarrow |R_2-R_1|=I_1I_2$



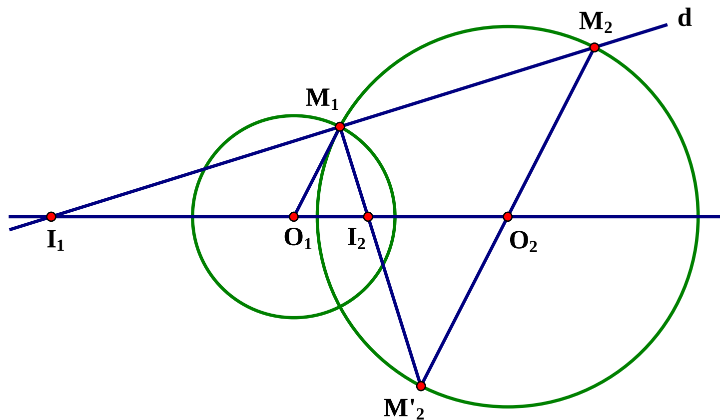
Có 1 phép vị tự:
+ $V_{\left(I;\frac{R_2}{R_1}\right)}(O_1;R_1)=(O_2;R_2)$
(I là tâm vị tự ngoài, k > 0)

TH3: Đường tròn $(O_1;R_1)$ không cắt đường tròn $(O_2;R_2) \Leftrightarrow R_1+R_2<I_1I_2$



Có 2 phép vị tự:
+ $V_{\left(I_1;\frac{R_2}{R_1}\right)}(O_1;R_1)=(O_2;R_2)$
(I_1 là tâm vị tự ngoài, k > 0)
+ $V_{\left(I_2;-\frac{R_2}{R_1}\right)}(O_1;R_1)=(O_2;R_2)$
(I_1 là tâm vị tự trong, k < 0)

TH4: Đường tròn $(O_1;R_1)$ cắt đường tròn $(O_2;R_2) \Leftrightarrow |R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$



Có 2 phép vị tự:

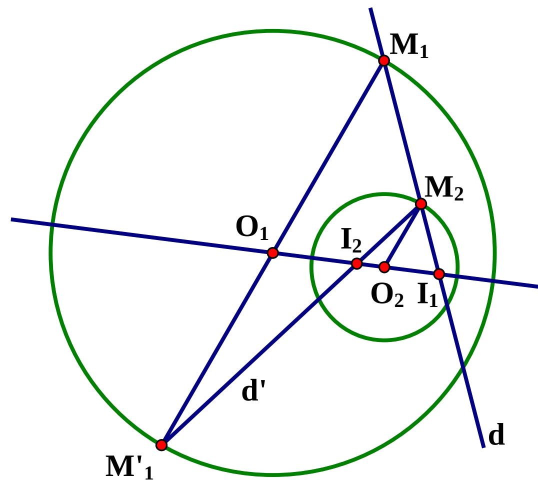
$+\ V_{\left(I_1;\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)$

(I_1 là tâm vị tự ngoài, k > 0)

$+\ V_{\left(I_2;-\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)$

(I_1 là tâm vị tự trong, k < 0)

TH5: Đường tròn $\left(O_1;R_1\right)$ đựng đường tròn $\left(O_2;R_2\right) \Leftrightarrow \left|R_1-R_2\right|>I_1I_2$



Có 2 phép vị tự:

$+\ V_{\left(I_1;\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)$

(I_1 là tâm vị tự ngoài, k > 0)

$+\ V_{\left(I_2;-\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)$

(I_1 là tâm vị tự trong, k < 0)

Chú ý:
+ Nếu 2 đường tròn bằng nhau thì có duy nhất 1 tâm vị tự trong chính là trung điểm đoạn thẳng nối tâm
+ Nếu 2 đường tròn đồng tâm thì có duy nhất 1 tâm vị tự là tâm 2 đường tròn, tuy nhiên có 2 tỉ số vị tự $k=\pm\frac{R_2}{R_1}$

3. Biểu thức tọa độ của phép vị tự

Xét phép vị tư $V_{(I;k)}(M)=M'$, trong đó I(a;b); M(x;y); M'(x';y') $\Rightarrow \overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM}$

$$\Leftrightarrow \left(x'-a;y'-b\right)=k\left(x-a;y-b\right)\Leftrightarrow \left(x'-a;y'-b\right)=\left(kx-ka;ky-kb\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x'-a=kx-ka\\ y'-b=ky-kb\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x'=kx+a(1-k)\\ y'=ky+b(1-k)\end{cases}$$

Vậy $V_{(I;k)}(M)=M'$ có biểu thức tọa độ là : $\begin{cases}x'=kx+a(1-k)\\ y'=ky+b(1-k)\end{cases}$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép vị tự bằng tính toán

Bài 1:

1) Cho A(1; - 3). Tìm tọa độ $A'=V_{(O;k=-2)}(A)$

2) Cho (d): x + 2y + 3 = 0. Tìm phương trình $d'=V_{(I;k)}(d)$ biết I(1;2), k = 2

Hướng dẫn:

1) $A'=V_{(O;k=-2)}(A)\Rightarrow \overrightarrow{OA'}=-2.\overrightarrow{OA}\Rightarrow A'(-2;6)$

2) Chọn M(-3;0), N(-1;-1) $\in d$. Gọi $M'=V_{(I;k)}(M);N'=V_{(I;k)}(N)\Rightarrow M'(2;-2);N'(-3;-4)\in d'$

Từ đó lập được phương trình d': x + 2y + 11 = 0

Cách khác: Gọi $M(x;y)\in d, M'=V_{(I;k)}(M)\Rightarrow \begin{cases}x'=2x-1\\ y'=2y-2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{x'+1}{2}\\ y=\dfrac{y'+2}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{x'+1}{2};\dfrac{y'+2}{2}\right)$

+ $M\in d\Rightarrow \dfrac{x'+1}{2}+2.\left(\dfrac{y'+2}{2}\right)+3=0\Leftrightarrow x'+2y'+11=0(*)$

+ Gọi $d'=V_{(I;k)}(d)$ $\Rightarrow M'\in d'$, từ (*) $\Rightarrow$ **d': x + 2y + 11 = 0**

Nhận xét:

+ Nếu $I\notin d\Rightarrow d'//d$ + Nếu $I\in d\Rightarrow d'\equiv d$

Bài 2: (Tương tự) Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm I, tỉ số k, biết

1) $A(1;2);I(3;-1);k=2$ **(Đáp số: $A'(-1;5)$)**

2) $B(2;-3);I(-1;-2);k=-3$ **(Đáp số: $B'(-10;1)$)**

3) $C(8;3);I(2;1);k=\dfrac{1}{2}$ **(Đáp số: $C'(5;2)$)**

4) $P(-3;2);Q(1;1);R(2;-4),I\equiv O,k=-\dfrac{1}{3}$ **(Đáp số: $P'\left(1;-\dfrac{2}{3}\right);Q'\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right);R'\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$)**

Bài 3:

1) Cho 3 điểm A(0 ; 3), B(2 ; -1), C(-1 ; 5). Tồn tại hay không phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C ?

2) Cho 3 điểm A(-1 ; 2), B(3 ; 1), C(4 ; 3). Tìm phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C ?

Hướng dẫn:

1) Giả sử tồn tại $V_{(A;k)}(B)=C\Rightarrow \overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}\Rightarrow \begin{cases}-1=k.2\\ 2=k.(-4)\end{cases}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$

Vậy tồn tại $V_{\left(A;-\frac{1}{2}\right)}(B)=C$

2) tương tự phần 1)

Bài 4: Cho đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=1$. Tìm phương trình đường tròn $(C')=V_{(I;k)}(C)$

Hướng dẫn:

+ Ta thấy tâm vị tự I(0;1) đồng thời là tâm đường tròn (C) $\Rightarrow$ đường tròn (C') cũng có tâm là I.

+ Do k = 2 nên bán kính đường tròn (C') gấp 2 lần bán kính đường tròn (C)
+ Vậy $(C'): x^2 + (y-1)^2 = 4$
Cách khác: Gọi $M(x;y) \in (C); M'(x';y') = V_{(I;k)}(M) \Rightarrow ...$

Bài 5: (tương tự) Tìm ảnh của các đường thẳng d qua phép vị tự tâm I, tỉ số k, biết:
1) $d: 3x - y - 5 = 0, I \equiv O; k = -\frac{2}{3}$ (**ĐS:d': 9x - 3y + 10 = 0**)
2) $d: 2x + y - 4 = 0, I(-1;2); k = -2$ (**ĐS:d': 2x + y + 8 = 0**)

Bài 6: (tương tự) Tìm ảnh của các đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I, tỉ số k, biết:
1) $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5, I \equiv O; k = -2$ (ĐS: $(C'): (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$)
2) $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5, I(1;2); k = -2$ (ĐS: $(C'): (x+3)^2 + (y-8)^2 = 20$)

Bài 7: Tìm phép vị tự biến:
1) Đường thẳng $d: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ thành $d': 2x - y - 6 = 0$, biết $V_{(O;k)}$
2) Đường tròn $(C_1): (x+4)^2 + y^2 = 2$ thành $(C_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$

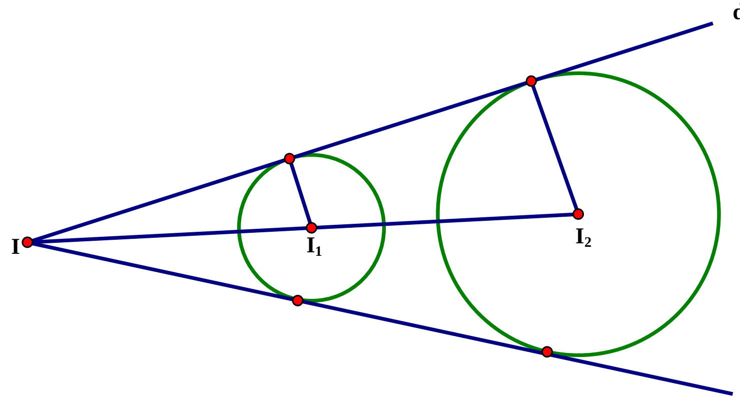
Hướng dẫn:
1) Có d: 2x - y - 4 = 0 // d'.
+ Chọn $M(2;0) \in d$, gọi $M'(x';y') = V_{(O;k)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = k.2 + 0(1-k) = 2k \\ y' = k.0 + 0(1-k) = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(2k;0)$
+ Do $d' = V_{(O;k)}(d) \Rightarrow M' \in d' \Rightarrow 2.2k - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$. Vậy $V_{\left(O;\frac{3}{2}\right)}(d) = d'$
2) (C_1) có tâm $I_1(-4;0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$; (C_2) có tâm $I_2(2;3)$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$
+ Ta thấy (C_1) và (C_2) không đồng tâm nên có 2 phép vị tự thỏa mãn yêu cầu bài toán:
TH1: $V_{\left(I;\frac{R_2}{R_1}\right)}(C_1) = (C_2) \Rightarrow V_{\left(I;\frac{R_2}{R_1}\right)}(I_1) = (I_2) \Rightarrow \overrightarrow{II_2} = \frac{R_2}{R_1}.\overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-10;-3)$
TH2: $V_{\left(I;-\frac{R_2}{R_1}\right)}(C_1) = (C_2) \Rightarrow V_{\left(I;-\frac{R_2}{R_1}\right)}(I_1) = (I_2) \Rightarrow \overrightarrow{II_2} = -\frac{R_2}{R_1}.\overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-2;1)$

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường tròn :
$(C_1): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1; (C_2): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$
a) Xác định tọa độ tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn đó
b) Viết phương trình tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn đó.

Hướng dẫn:
a) (C_1) có tâm $I_1(1;3)$, bán kính $R_1 = 1$; (C_2) có tâm $I_2(4;3)$, bán kính $R_2 = 2$

+ Gọi I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự $V_{(I;k)}(C_1)=(C_2)\Rightarrow V_{(I;k)}(I_1)=(I_2)\Rightarrow \overrightarrow{II_2}=k\overrightarrow{II_1}$ trong đó $k=\frac{R_2}{R_1}=2$, giải hệ phương trình trên $\Rightarrow I(-2;3)$

b) Ta thấy $R_2+R_1=I_1I_2$ nên (C_1) và (C_2) ngoài nhau.



+ Gọi d là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2), khi đó d đi qua I, giả sử d có hệ số góc là k, khi đó phương trình d có dạng: $kx-y+3+2k=0$

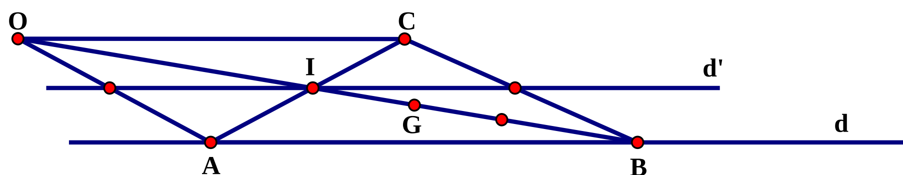
+ Vì d tiếp xúc $(C_1)\Rightarrow d(I_1;d)=R_1\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} d:\left(\sqrt{2}\right)x-4y+12+3\sqrt{2}=0\\ d:\left(\sqrt{2}\right)x+4y-12+3\sqrt{2}=0\end{array}\right.$

Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(-1;2) và đường thẳng d đi qua A có hệ số góc bằng 1. Gọi B là điểm di động trên d. Gọi C là điểm sao cho tứ giác OABC là hình bình hành. Tìm phương trình tập hợp:

a) Các tâm đối xứng I của hình bình hành **b)** Các trọng tâm G của tam giác ABC

Hướng dẫn

a) Đường thẳng d qua A và có hệ số góc bằng 1 $\Rightarrow d\equiv AB: y-2=1(x+1)\Leftrightarrow y=x+3$



+ I là tâm đối xứng của hình bình hành nên $\Rightarrow \overrightarrow{OB}=2.\overrightarrow{OI}\Rightarrow V_{(O;2)}(I)=B$.

Mà $B\in d\Rightarrow I\in d'=V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(d)$ $\Rightarrow$ d'// d và qua I đồng thời qua trung điểm OA

$\Rightarrow d': x-y+\frac{3}{2}=0$

b) Ta có $\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}\Rightarrow B=V_{\left(O;\frac{3}{2}\right)}(G)$. Mà $B\in d\Rightarrow G\in d''=V_{\left(O;\frac{2}{3}\right)}(d)$ $\Rightarrow$ d''// d và qua

$A'=V_{\left(O;\frac{2}{3}\right)}(A)\Rightarrow A'\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow d'':x-y+2=0$

DẠNG 2: Một số bài toán chứng minh, dựng hình và quỹ tích

Bài 1: Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp 2 phép vị tự tâm I sẽ được một phép vị tự tâm I

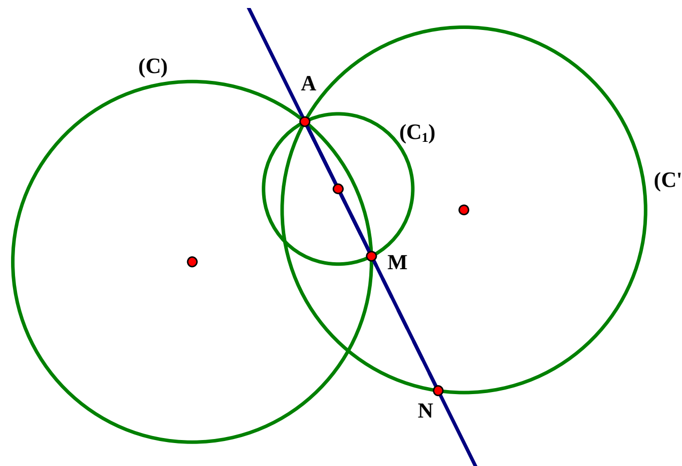
Hướng dẫn

+ Xét $V_{(I,k)}(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM}$ (1), $V_{(I,k')}(M')=M''\Leftrightarrow\overrightarrow{IM''}=k'.\overrightarrow{IM'}$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow\overrightarrow{IM''}=k.k'.\overrightarrow{IM}\Rightarrow V_{(I;k.k')}(M)=M''$ (đpcm)

Bài 2: Cho 2 đường tròn (C) và (C') cắt nhau có 1 giao điểm là A. Hãy dựng đường thẳng d qua A cắt (C) tại M và cắt (C') tại N sao cho M là trung điểm của AN.

Hướng dẫn



* *Bước 1:* Phân tích

+ Giả sử bài toán đã dựng được. Ta có: M là trung điểm AN $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AN}\Rightarrow V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(N)=M$

+ Vì $N\in(C')\Rightarrow M\in(C_1)=V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C')$

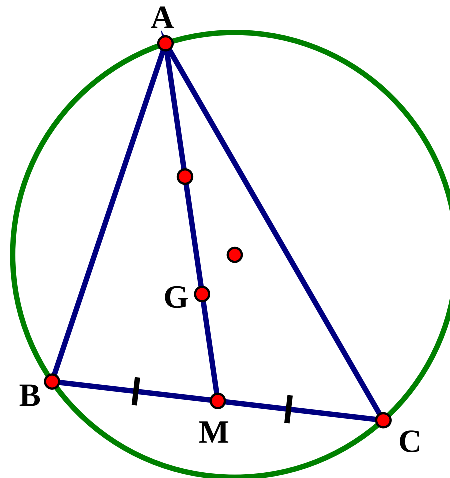
* *Bước 2:* Cách dựng

+ Dựng đường tròn $(C_1)=V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C')$ (đường tròn (C_1) qua A, có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ bán kính của (C'))

+ Dựng $M=(C_1)\cap(C)$ (Do $M\in(C),M\in(C_1)$)

+ Nối AM kéo dài cắt (C') tại N

Bài 3: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O ; R). B và C cố định, A di động trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích trọng tâm ΔABC.



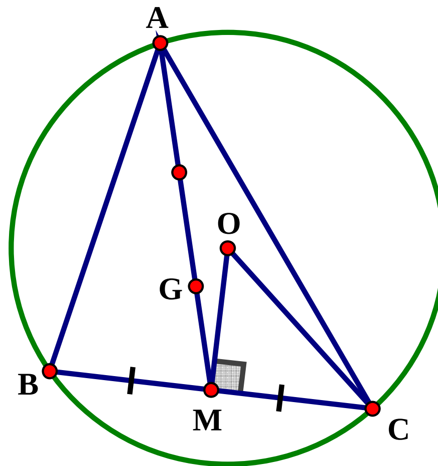
Hướng dẫn

+ Gọi M là trung điểm BC. Do B, C cố định nên M cố định, mà $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{MA}\Rightarrow V_{\left(M;\frac{1}{3}\right)}(A)=G$

Vậy quỹ tích $G\in(O';R')=V_{\left(M;\frac{1}{3}\right)}(O;R)$

Bài 4: Cho đường tròn (O ; R) và 1 điểm A cố định trên đường tròn. BC là dây cung di động và BC có độ dài không đổi bằng 2a (a < R). Tìm tập hợp trọng tâm G của ΔABC

Hướng dẫn



+ Gọi M là trung điểm của BC, ta có $OM\perp BC\Rightarrow OM=\sqrt{OC^2-MC^2}=\sqrt{R^2-a^2}$

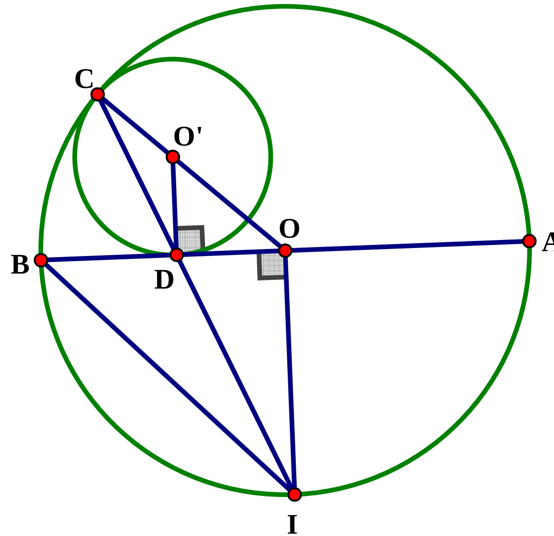
$\Rightarrow M\in\left(O;\sqrt{R^2-a^2}\right)$

+ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Rightarrow G=V_{\left(A;\frac{2}{3}\right)}(M)$

+ Do M chạy trên đường tròn $\left(O;\sqrt{R^2-a^2}\right)$ nên G chạy trên đường tròn (O’) là ảnh của đường tròn $\left(O;\sqrt{R^2-a^2}\right)$ qua phép vị tự $V_{\left(A;\frac{2}{3}\right)}$

Bài 5: Cho đường tròn (O ; R), đường kính AB. Một đường tròn (O’) tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D. Đường thẳng CD cắt (O ; R) tại I. Tính độ dài AI, BI theo R.

Hướng dẫn



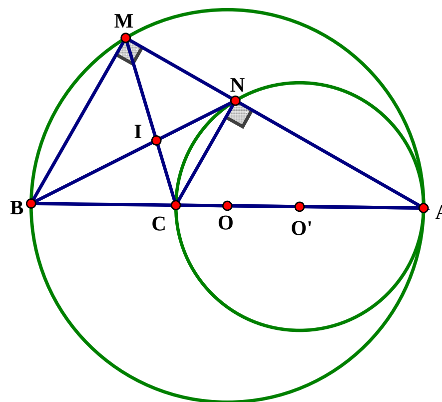
+ Ta có $V_{\left(C;\frac{R'}{R}\right)}(O)=O'\Rightarrow CO'=\frac{R'}{R}.CO$ (1), $V_{\left(C;\frac{R'}{R}\right)}(I)=D\Rightarrow CD=\frac{R'}{R}.CI$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{CO'}{CD}=\frac{CO}{CI}\Rightarrow OI//O'D\Rightarrow OI\perp AB\Rightarrow$ I là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow AI=BI=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=R\sqrt{2}$

Bài 6: Cho 2 đường tròn (O ; R) và (O’ ; R’) tiếp xúc trong tại A (R > R’). Đường kính qua A cắt (O ; R) tại B và cắt (O’ ; R’) tại C. Một đường thẳng di động qua A cắt (O ; R) tại M và cắt (O’;R’) tại N. Tìm quỹ tích của $I=BN\cap CM$

Hướng dẫn



+ Ta dự đoán $V_{\left(C;\frac{CI}{CM}\right)}(M)=I$, mà M nằm trên đường tròn (O) $\Rightarrow$ I nằm trên đường tròn

$(O_1)=V_{\left(C;\frac{CI}{CM}\right)}(O)$. Như vậy ta cần phải tính $\frac{CI}{CM}$ theo R và R'.

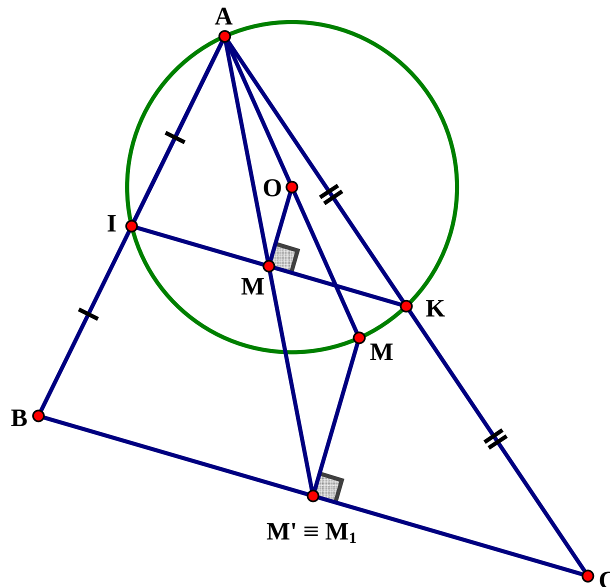
Thật vậy: $\frac{CM}{CI}=\frac{CI+IM}{CI}=1+\frac{IM}{CI}$

+ Mà $\frac{IM}{CI}=\frac{IB}{IN}=\frac{BM}{CN}=\frac{AB}{AC}=\frac{2R}{2R'}=\frac{R}{R'}\Rightarrow\frac{CM}{CI}=\frac{R+R'}{R'}\Rightarrow\frac{CI}{CM}=\frac{R'}{R+R'}\Rightarrow V_{\left(C;\frac{R'}{R+R'}\right)}(M)=I$

Vậy tập hợp các điểm I là đường tròn $(O'')=V_{\left(C;\frac{R'}{R+R'}\right)}\left((O;R)\right)$

Bài 7: Cho ΔABC, gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm AB, AC, IK. Đường tròn ngoại tiếp ΔAIK cắt AO tại A'. Gọi M' là chân đường vuông góc hạ từ A' xuống BC. Chứng minh rằng 3 điểm A, M, M' thẳng hàng.

Hướng dẫn

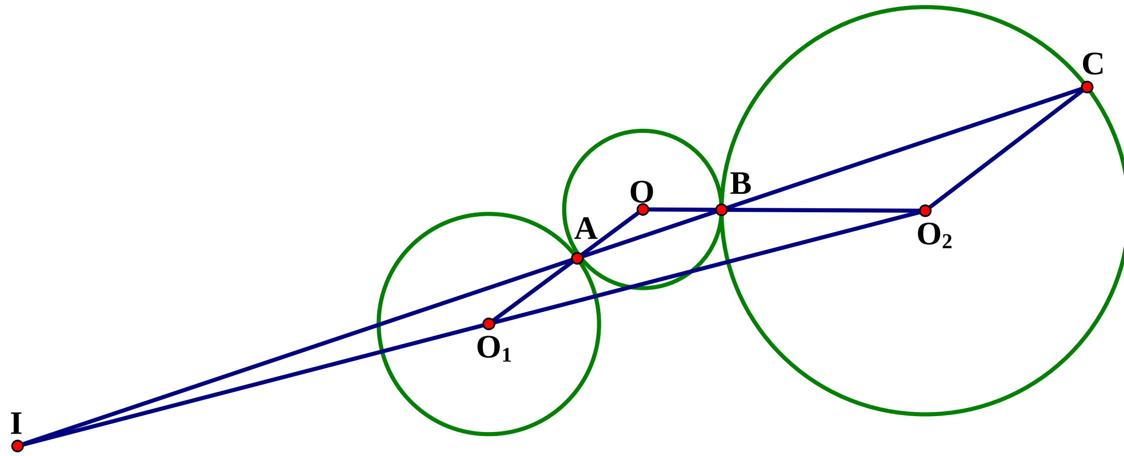


+ Ta có $\begin{cases}AB=2.AI\\AC=2.AK\end{cases}\Rightarrow V_{(A;2)}\left(\Delta AIK\right)=\Delta ABC\ (1)\Rightarrow V_{(A;2)}(O)=A'$ (do $OA'=2.OA$)

+ Gọi M_1 là trung điểm BC, vì M là trung điểm IK, vậy từ (1) $\Rightarrow V_{(A;2)}(M)=M_1$

$\Rightarrow$ 3 điểm A, M, M' thẳng hàng (do $V_{(A;2)}(M)=M_1\Rightarrow A,M,M_1$ thẳng hàng)

Bài 8: Cho 2 đường tròn $\left(O_1;R_1\right)$ và $\left(O_2;R_2\right)$ ngoài nhau, $R_1\neq R_2$. Một đường tròn (O;R) thay đổi tiếp xúc ngoài với $\left(O_1;R_1\right)$ tại A và tiếp xúc ngoài với $\left(O_2;R_2\right)$ tại B.
Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua 1 điểm cố định.



Hướng dẫn

+ Gọi $\mathbf{C=AB\cap\left(O_2;R_2\right)}$

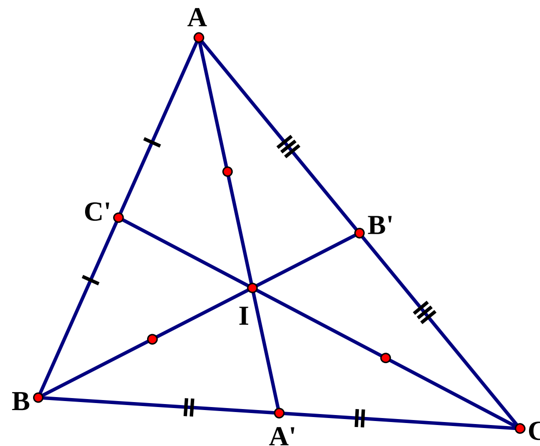
+ Ta có : $\begin{cases}\mathbf{V_{\left(A;-\frac{R}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O;R\right)}\\ \mathbf{V_{\left(A;-\frac{R_2}{R}\right)}\left(O;R\right)=\left(O_2;R_2\right)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{O,A,O_1}\ \textbf{thẳng hàng}\\ \mathbf{AO//CO_2}\end{cases}\Rightarrow\mathbf{AO_1//CO_2}$

+ Gọi $\mathbf{I=AB\cap O_1O_2}\Rightarrow$ I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự $\mathbf{V_{\left(I;\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)}$ nên I cố định

Vậy AB luôn đi qua điểm I cố định là tâm vị tự ngoài của phép vị tự $\mathbf{V_{\left(I;\frac{R_2}{R_1}\right)}\left(O_1;R_1\right)=\left(O_2;R_2\right)}$

Bài 9: $\mathbf{\Delta ABC}$ có A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB
a) Tìm phép vị tự V biến $\mathbf{\Delta ABC}$ thành $\mathbf{\Delta A'B'C'}$
b) Tìm phép vị tự V biến $\mathbf{\Delta A'B'C'}$ thành $\mathbf{\Delta ABC}$

Hướng dẫn



a) Ta phân tích như sau để tìm hướng giải:

+ Giả sử có phép vị tự $\mathbf{V_{(I;k)}(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}\Rightarrow I,M,M'}$ thẳng hàng

Vậy để có phép vị tự $V_{(I;k)}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ thì :

$\begin{cases} \textbf{I, A, A' thẳng hàng} \\ \textbf{I, B, B' thẳng hàng} \Rightarrow \textbf{I là giao điểm của AA', BB', CC'} \\ \textbf{I, C, C' thẳng hàng} \end{cases}$

+ Mà A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB $\Rightarrow$ I là trọng tâm ΔABC

Vậy phép vị tự cần tìm là $V_{(I;k)}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, trong đó I là trọng tâm ΔABC,

$k = -\frac{OA'}{OA} = -\frac{OB'}{OB} = -\frac{OC'}{OC} = -\frac{1}{2}$

b) Từ phần a) ta có: $V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(\Delta A'B'C') = \Delta ABC$ (hay $V_{(I;-2)}(\Delta A'B'C') = \Delta ABC$)

BÀI HỌC 6: PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng, phép biến hình biến mỗi điểm M thành M'; N thành N' sao cho $M'N' = k.MN$ (với k là số thực dương cho trước) thì phép biến hình đó gọi là phép đồng dạng tỉ số k.

Ký hiệu: $Đ_k : (MN) = M'N'$ hoặc $Đ_k : MN \to M'N'$

(Như vậy: phép đồng dạng là phép phóng to thu nhỏ, không cần theo 1 phương nhất định như phép vị tự vì không cần quan tâm đến yếu tố thẳng hàng)

2. Chú ý

+ Khi thực hiện liên tiếp 1 phép vị tự và 1 phép dời hình bất kỳ ta được 1 phép đồng dạng

+ Khi thực hiện liên tiếp 2 phép đồng dạng ta được một phép đồng dạng

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép đồng dạng bằng tính toán

Bài 1: Cho đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Viết phương trình d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O, góc quay (-45^0)

Hướng dẫn

+ Gọi $d_1 = V_{\left(I;k=\frac{1}{2}\right)}(d) \Rightarrow d_1 : x + y = 0$

+ Gọi $d_2 = Q_{(O;-45^0)}(d_1) \Rightarrow d_2 : x = 0$

Vậy $d' \equiv d_2 : x = 0$

Bài 2: Xét phép biến hình biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-2x+3;2y-1)$. Chứng minh F là một phép đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng

Hướng dẫn:

Tìm ảnh của M lần lượt qua các phép biến hình sau:

- Phép vị tự tâm O, tỉ số 2
- Phép đối xứng trục Oy
- Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (3;1)$

Thật vậy:

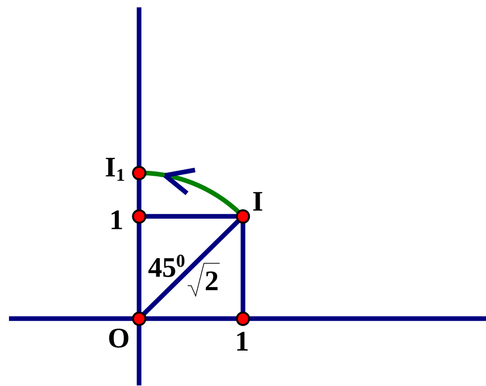
- Phép vị tự tâm O, tỉ số 2: $M \to M_1$ có $M_1(2x;2y)$
- Phép đối xứng trục Oy: $M_1 \to M_2$ có $M_2(2x;-2y)$
- Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}=(3;1)$: $M_2 \to M'(2x+3;1-2y)$

$\Rightarrow$ Phép biến hình F là tích của phép vị tự và phép dời hình

$\Rightarrow$ F là phép đồng dạng, tỉ số 2

Bài 3: Cho điểm $I(1;1)$, đường tròn $(I;2)$. Viết phương trình đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$ (với O là gốc tọa độ)

Hướng dẫn



+ Gọi đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính $\sqrt{2}$ là ảnh của đường tròn (C) tâm I, bán kính bằng 2

$\Rightarrow Q_{(O;45^0)}(I)=I_1 \Rightarrow I_1\left(0;\sqrt{2}\right) \Rightarrow (C_1): x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4 \ (R_1=2)$

+ Gọi đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2 là ảnh của đường tròn (C_1) qua phép vị tự $V_{(O;\sqrt{2})}$ (do k > 0 nên ta có tâm vị tự ngoài), có $k=\frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{R_2}{2} \Leftrightarrow R_2=2\sqrt{2}$

Mặt khác $V_{(O;\sqrt{2})}(I_1)=I_2 \Rightarrow \begin{cases} 0=\dfrac{x_{I_2}-\sqrt{2}x_{I_1}}{1-\sqrt{2}} \\ 0=\dfrac{y_{I_2}-\sqrt{2}y_{I_1}}{1-\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{I_2}=0 \\ y_{I_2}=\sqrt{2}.\sqrt{2}=2 \end{cases} \Rightarrow I_2(0;2)$

Vậy $(C_2): x^2+(y-2)^2=8$

DẠNG 2: Một số bài toán chứng minh, dựng hình và quỹ tích

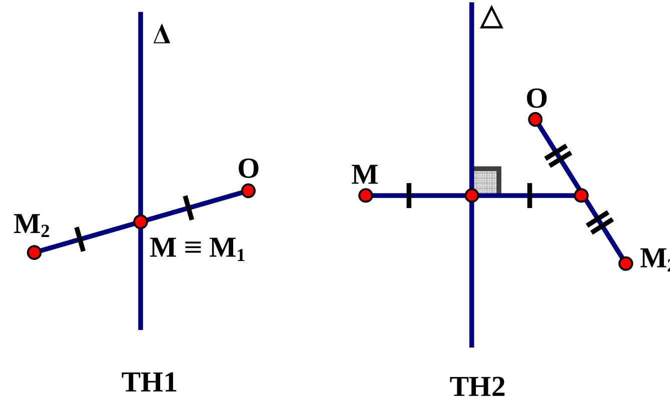
Bài 1: Trên mặt phẳng, cho 1 điểm M.

1). Dựng ảnh của phép đồng dạng F là hợp thành của phép đối xứng trục D_Δ và phép vị tự V tâm O với $O \notin \Delta$, tỉ số k = 2.

2). Dựng ảnh của phép đồng dạng F là hợp thành của phép vị tự V, tâm O, tỉ số k = - 3 và phép quay tâm I, góc quay $=90^0$

Hướng dẫn

1).



TH1: $M \in \Delta$

+ Gọi $M_1 = D_\Delta(M) \Rightarrow M_1 \equiv M$

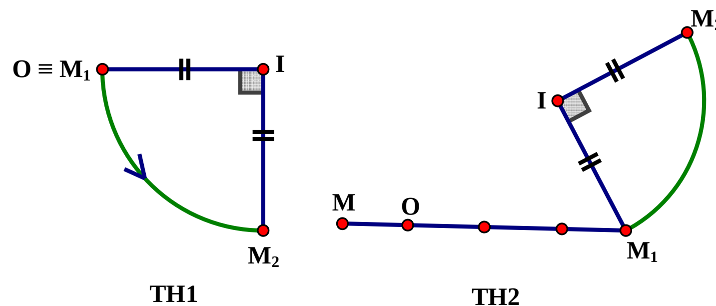
+ Gọi $M_2 = V_{(O;k=2)}(M_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = 2.\overrightarrow{OM_1} \Rightarrow$ M là trung điểm OM_2

TH2: $M \notin \Delta$

+ Gọi $M_1 = D_\Delta(M) \Rightarrow \Delta$ là trung trực của MM_1

+ Gọi $M_2 = V_{(O;k=2)}(M_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = 2.\overrightarrow{OM_1} \Rightarrow M_1$ là trung điểm của OM_2

2).



TH1: $M \equiv O$

+ Gọi $M_1 = V_{(O;-3)}(M) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = -3.\overrightarrow{OM} = \vec{0} \Rightarrow M_1 \equiv O$

+ Gọi $M_2 = Q_{(I;90^0)}(M_2) \Rightarrow \begin{cases} IM_2 = IM_1 \\ \left(\widehat{IM_1;IM_2}\right) = 90^0 \end{cases}$ (ΔIM_1M_2 vuông cân tại I)

TH2: $M \neq O$

+ Gọi $M_1 = V_{(O;-3)}(M) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = -3.\overrightarrow{OM}$

+ Gọi $M_2 = Q_{(I;90^0)}(M_2) \Rightarrow \begin{cases} IM_2 = IM_1 \\ \left(\widehat{IM_1;IM_2}\right) = 90^0 \end{cases}$ (ΔIM_1M_2 vuông cân tại I)

CÒN NỮA …

CÁC SÁCH ĐÃ PHÁT HÀNH

(1). Các chuyên đề đại số 9 (Ôn thi vào lớp 10)
(2). Tinh hoa hình học (Ôn thi vào lớp 10)
(3). Luyện đề môn toán (Ôn thi vào lớp 10)
(4). Tinh hoa hình học (Ôn thi THPT quốc gia)
(5). Luyện đề môn toán (Ôn thi THPT quốc gia)

ĐỂ ĐẶT MUA SÁCH, CÁC EM LIÊN HỆ VỚI THẦY

Facebook: **https://www.facebook.com/nguyenhuubien1979**
Gmail: **ng.huubien@gmail.com**
Điện thoại: **01234.170.323**